

UNE RÉGION EXPLICITE SANS ZÉROS POUR LA FONCTION ζ DE RIEMANN

HABIBA KADIRI

ABSTRACT. Dans cet article, nous montrons que la fonction ζ de Riemann n'a pas de zéros dans la région :

$$\Re s \geq 1 - \frac{1}{5.69693 \log |\Im s|} \quad (|\Im s| \geq 2).$$

1. HISTORIQUE ET RÉSULTATS.

Depuis l'article de Riemann en 1860 (cf. [13]), nous savons que la répartition des nombres premiers est étroitement liée à la répartition des zéros d'une fonction particulière, appelée depuis la fonction ζ de Riemann. Nous rappelons qu'elle est définie sur le demi-plan $\Re s > 1$ par :

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$$

où le produit porte sur les nombres premiers.

La série ci-dessus converge absolument et uniformément dans le demi-plan $\Re s \geq \sigma_0$, pour tout $\sigma_0 > 1$. La fonction se prolonge en une fonction holomorphe dans le plan complexe sauf en 1, qui est pôle unique et en lequel elle a pour résidu 1. Elle vérifie l'équation fonctionnelle suivante sur le plan complexe tout entier :

$$\pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2} \Gamma((1-s)/2) \zeta(1-s)$$

On en déduit que les zéros réels de la fonction $\zeta(s)$ sont les pôles de $\Gamma(s/2+1)$, c'est à dire les entiers $-2n$, où $n \in \mathbb{N}^*$ et qu'elle a une infinité de racines complexes dont la partie réelle est comprise entre 0 et 1. Nous appellerons $Z(\zeta)$ l'ensemble de ces zéros dits non-triviaux et les noterons $\rho = \beta + i\gamma$. Ils se répartissent symétriquement par rapport à l'axe réel et par rapport à l'axe $\Re s = 1/2$.

L'hypothèse de Riemann affirme qu'en fait, ils se trouvent tous sur la droite $\Re s = 1/2$. Mais cette conjecture n'a encore été ni démontrée ni contredite. Van de Lune, de Riele et Winter l'ont cependant vérifiée en 1986 (cf. [11]) pour les zéros de partie imaginaire inférieure à $5 \cdot 10^8$, ce qui concerne les $1.5 \cdot 10^9$ premiers zéros de la fonction ζ de Riemann. Ce résultat a même été tout récemment amélioré par S.Wedeniowski jusqu'à une partie imaginaire de 3 330 657 430.697.

En attendant, l'écriture de ζ sous forme de produit eulérien nous assure

qu'elle n'a pas de zéros dans le demi-plan $\Re s > 1$. En fait, l'influence de la formule d'Euler s'étend même à gauche de cette région. Ainsi, en 1896, Hadamard (voir [5]) et De La Vallée Poussin (cf. [19]) établissent simultanément mais séparément que ζ ne s'annule pas sur la droite $\Re s = 1$. Cette affirmation est l'outil fondamental leur permettant d'établir le théorème des nombres premiers, à savoir qu'on a l'estimation asymptotique suivante pour le nombre $\pi(x)$ d'entiers premiers inférieurs à x :

$$\pi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} Li(x) \quad \text{où} \quad Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}.$$

En 1899, De La Vallée Poussin (cf. [20]) élargit son résultat à la région :

$$\Re s \geq 1 - \frac{1}{R_0 \log |\Im s|}, \quad |\Im s| \geq 2, \quad \text{avec} \quad R_0 = 34.82$$

ce qui lui permet d'estimer le terme d'erreur pour le théorème des nombres premiers :

$$\pi(x) - Li(x) = \mathcal{O} \left(x \exp \left(-\sqrt{\frac{\log x}{R_0}} \right) \right) \quad \text{quand } x \rightarrow +\infty.$$

B.Rosser améliore la valeur de la constante R_0 , notamment en modifiant le polynôme trigonométrique (voir ci-après) et en 1939 il obtient $R_0 = 19$ (cf. [14]) puis avec L.Schoenfeld en 1962, $R_0 = 17.516$ (cf. [15]). En 1975, dans [16], ces derniers reprennent une idée fondamentale due à Stechkin (cf. [17], lemme 2) et descendent jusqu'à $R_0 = 9.645908801$.

Beaucoup plus récemment, K.Ford (cf. [3] ou [4]) atteint une valeur de 8.463, essentiellement en utilisant une majoration de la fonction ζ sur l'axe critique, méthode qui ne se généralise pas aux fonctions L de Dirichlet.

En se basant sur la majoration de $\zeta(s)$ lorsque $\Re s = 1$ donnée par la méthode de Korobov et Vinogradov (cf. [9]), il est possible d'obtenir une région sans zéros du type :

$$\Re s > 1 - \frac{1}{R_1 (\log |\Im s|)^{2/3} (\log \log |\Im s|)^{1/3}} \quad (|\Im s| \geq 10)$$

En 1994, O.V.Popov (cf. [12]) trouve $R_1 = 14518$, puis en 2000, Y.Cheng trouve $R_1 = 990$ (voir [1]), résultat dernièrement amélioré par K.Ford : $R_1 = 57.54$ (voir [4]).

Nous allons démontrer le résultat suivant :

Théorème 1.1 (Principal).

La fonction ζ de Riemann ne s'annule jamais dans la région suivante :

$$\Re s \geq 1 - \frac{1}{R_0 \log (|\Im s|)}, \quad |\Im s| \geq 2, \quad \text{avec} \quad R_0 = 5.69693.$$

Cette région reste plus large que la région de Ford-Vinograd jusqu'à des valeurs de $|\Im s|$ inférieures à $e^{9402.562}$.

D'autre part, les outils mis en œuvre ici se généralisent aux fonctions L de Dirichlet (voir [7] ou [8]).

Rappelons les trois points fondamentaux autour desquels s'articule la preuve d'un tel résultat. Tout repose d'abord sur une expression de la partie réelle de $-(\zeta'/\zeta)(s) = \sum_{n \geq 1} \Lambda(n)n^{-s}$ en fonction des zéros de la fonction ζ de Riemann. Pour cela, il y a deux approches :

- celle, dite globale, de De La Vallée Poussin qui regarde tous les zéros avec la relation

$$(1) \quad -\Re \frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \frac{-\log \pi}{2} + \frac{1}{2} \Re \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{s}{2} + 1 \right) + \Re \left(\frac{1}{s-1} \right) - \sum_{\rho \in Z(\zeta)} \Re \left(\frac{1}{s-\rho} \right).$$

- celle, dite locale, de Landau qui s'attache aux zéros "proches" de s avec la majoration

$$(2) \quad -\Re \frac{\zeta'}{\zeta}(s) = - \sum_{|s-\rho| \leq \frac{c}{\log \Im s}} \Re \left(\frac{1}{s-\rho} \right) + \mathcal{O}(\log \Im s)$$

Le second point essentiel de la preuve consiste en la positivité de la somme sur les zéros $\sum_{\rho} \Re \left(\frac{1}{s-\rho} \right)$ lorsqu'on suppose $\Re s > 1$.

Enfin, la preuve s'achève avec un autre argument de positivité : si

$$P(\theta) = \sum_{k=0}^K a_k \cos(k\theta)$$

est un polynôme trigonométrique vérifiant

$$a_k \geq 0 \quad \text{et} \quad P(\theta) \geq 0,$$

alors on a :

$$\Re \sum_{k=0}^K a_k \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma+ikt}} \geq 0.$$

En ce qui concerne le travail présenté ici, nous reprendrons une idée exploitée entre autres par Stechkin et Heath-Brown, et qui consiste à multiplier la fonction de von Mangoldt $\Lambda(n)$ par une fonction lisse positive $g(\log n)$ tout en conservant la positivité de la somme sur les zéros. Par exemple Stechkin (cf. [17]) prend $g(x) = 1 - \kappa e^{-\delta x}$ où κ et δ sont deux réels positifs. Quant à Heath-Brown, il propose une formule plus compliquée (cf. [6] et le paragraphe 2.2), l'essentiel pour g étant d'être de classe C^2 dans $]0, +\infty[$, à support compact et, comme nous allons le voir, à transformée de Laplace positive. En fait, nous considérerons le produit de leurs deux fonctions.

Les formules de Weil (voir [22]) s'appliquent alors et donnent une formule

impliquant la somme sur tous les zéros (voir le paragraphe 2.1) :

$$\begin{aligned} \Re\left(\sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s} g(\log n)\right) &= g(0) \Re\left(-\frac{1}{2} \log \pi + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s}{2} + 1\right)\right) \\ &\quad + \Re G(s-1) - \sum_{\rho \in Z(\zeta)} \Re G(s-\rho) + \Re R(s) \end{aligned}$$

où G est la transformée de Laplace de g

$$G(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} g(t) dt = \frac{g(0)}{z} + \frac{1}{z} \int_0^{+\infty} e^{-zt} g'(t) dt$$

et où $R(s)$ est un terme reste sous la condition $G(z) - g(0)/z = \mathcal{O}(1/|z|^2)$. En remarquant que la transformée de Laplace de la fonction constante égale à 1 est $\frac{1}{z}$, et en rappelant que l'inégalité $\Re \frac{1}{z} \geq 0$ si $\Re z > 0$ est fondamentale pour traiter la somme sur les zéros, nous souhaiterions imposer à g que sa transformée de Laplace vérifie :

$$\Re G(z) \geq 0 \quad \text{si} \quad \Re z > 0$$

Nous affaiblissons ici cette condition en utilisant la symétrie des zéros non triviaux et généralisons le lemme de Stechkin (cf. lemme 2, [17]) en montrant que

$$\Re G(s-\rho) + \Re G(s+1-\bar{\rho}) \geq 0 \quad \text{si} \quad \Re(s-\rho) > 0$$

(voir le paragraphe 2.4).

En prenant $\Re s > 1$, une telle démonstration apporterait déjà une amélioration à la constante de Rosser et Schoenfeld. Or la fonction g étant à support compact, cela nous permet de choisir s avec $\Re s \leq 1$.

Pour ce qui est de la somme

$$\sum_{\substack{\rho \in Z(\zeta) \\ \Re(s-\rho) \leq 0}} \Re G(s-\rho),$$

nous montrerons que c'est un terme reste (voir le paragraphe 2.4).

Enfin, nous conservons l'argument trigonométrique final en considérant un polynôme de degré 4 proche de celui introduit par Rosser et Schoenfeld (voir le paragraphe 2.3).

Nous donnons dans le paragraphe qui suit tous les résultats nécessaires à l'établissement de notre résultat et nous y fixons nos notations. Pour le détail des preuves, nous nous reporterons ensuite aux parties trois et quatre.

Je remercie O. Ramaré pour les conseils avisés qu'il m'a prodigués au fil de cette étude ainsi que K. Ford pour m'avoir aimablement transmis une version préliminaire de son article [4].

Enfin, je tiens également à remercier le référé pour tout le soin qu'il a apporté à la relecture du manuscrit. Je lui suis particulièrement reconnaissante

d'avoir trouvé une optimisation au polynôme de Rosser et Schoenfeld, ce qui permet d'améliorer le résultat final d'encore quelques décimales.

2. STRUCTURE DE LA PREUVE.

Commençons par préciser nos paramètres. Nous nous donnons une fonction positive f , de classe $C^2([0, d])$, support compact dans $[0, d[$ et telle que :

$$(H_1) \quad f(d) = f'(0) = f'(d) = f''(d) = 0.$$

dont nous notons F la transforme de Laplace :

$$F(s) = \int_0^d e^{-st} f(t) dt.$$

Cette fonction sera choisie au paragraphe 2.2. Nous considérons ensuite un zéro non trivial $\varrho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ de la fonction ζ de Riemann et nous souhaitons montrer que ce zéro vérifie le théorème 1.1. La symétrie des zéros de ζ nous permet de nous limiter au cas où γ_0 est positif. De plus, comme tous les zéros de partie imaginaire positive inférieure à $T_0 = 3\,330\,657\,430.697$ sont connus (cf. [21]) et résident tous sur la droite critique, nous supposons que γ_0 est supérieur à T_0 . Enfin, nous supposons que $(1 - \beta_0) \log \gamma_0 \leq \frac{1}{5}$. Nous noterons η le réel $(1 - \beta_0)$, s le nombre complexe $\sigma + it$, où $t \in [0, +\infty[$, R un réel pour lequel la région sans zéro est vérifiée et t_0 un réel supérieur à 1 (on prendra $t_0 = 10$). Nous écrirons η sous la forme $\frac{1}{r \log \gamma_0}$, où $5 \leq r \leq R$ en vertu de notre hypothèse, et σ sous la forme $1 - \frac{1}{R \log(4\gamma_0 + t_0)}$. Grâce au résultat de Rosser (cf. [14]), nous prenons tout d'abord $R = 9.645908801$, ce qui implique les valeurs numériques :

$$(3) \quad \sigma \geq \sigma_0 = 1 - \frac{1}{9.645908801 \log(4T_0 + t_0)} \geq 0.99555$$

$$(4) \quad \eta \leq \eta_0 = \frac{1}{r \log T_0} \leq \frac{1}{5 \log T_0} \leq 0.00768$$

$$(5) \quad \omega := \frac{1 - \sigma}{\eta} = \frac{r \log \gamma_0}{R \log(4\gamma_0 + t_0)} \geq \omega_0 \text{ avec } \omega_0 = \frac{r \log T_0}{R \log(4T_0 + t_0)} = \frac{1 - \sigma_0}{\eta_0}.$$

Dans la suite, κ et δ désignent des constantes qui dépendent et ne dépendent que de r et R . Cette dépendance est assez faible mais toutefois numériquement intéressante. De plus, nous leur imposons la condition suivante :

$$(\delta^{-3} + (1 - \eta_0 + \delta)^{-3})^{-1} \leq \kappa \leq (\delta^{-1} + (1 - \eta_0 + \delta)^{-1})^{-1}.$$

Ou plutôt, en fixant les valeurs de η_0 dans $[0, 10^{-2}]$ et δ dans $[(\sqrt{5} - 1)/2, 0.866]$, nous demandons à κ de vérifier :

$$(6) \quad (\delta^{-3} + (1 + \delta)^{-3})^{-1} \leq \kappa \leq (\delta^{-1} + (0.99 + \delta)^{-1})^{-1}.$$

2.1. Une formule explicite. Nous commençons par une formule explicite à la Weil (cf. [22]) que nous démontrons au paragraphe 3.1.

Proposition 2.1. *Soit f une fonction comme ci-dessus et soit s un nombre complexe. Nous avons*

$$(7) \quad \Re \left(\sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s} f(\log n) \right) = f(0) \left(-\frac{1}{2} \log \pi + \Re \frac{1}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{s}{2} + 1 \right) \right) \\ + \Re F(s-1) - \sum_{\varrho \in Z(\zeta)} \Re F(s-\varrho) \\ + \Re \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} \Re \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{z}{2} \right) \frac{F_2(s-z)}{(s-z)^2} dz + \frac{F_2(s)}{s^2} \right)$$

où F_2 est la transformée de Laplace de f'' et où $Z(\zeta)$ désigne l'ensemble des zéros non triviaux de ζ .

Nous prenons des notations supplémentaires pour alléger quelque peu le travail typographique et posons

$$T_1(s) = -\frac{1}{2} \log(\pi) + \frac{1}{2} \Re \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{s}{2} + 1 \right), \\ T_2(s) = \Re \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} \Re \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{z}{2} \right) \frac{F_2(s-z)}{(s-z)^2} dz + \frac{F_2(s)}{s^2} \right) \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Re \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{1}{4} + i \frac{t}{2} \right) \Re \frac{F_2(s-1/2-it)}{(s-1/2-it)^2} dt + \Re \frac{F_2(s)}{s^2}.$$

Nous introduisons aussi les trois différences

$$\Delta_1(s) = T_1(s) - \kappa T_1(s+\delta), \quad \Delta_2(s) = T_2(s) - \kappa T_2(s+\delta), \\ D(s) = \Re F(s) - \kappa \Re F(s+\delta).$$

Notons qu'il est sous-entendu qu'elles dépendent des paramètres δ et κ .

De (7), nous tirons :

$$(8) \quad \Re \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s} f(\log n) \left(1 - \frac{\kappa}{n^\delta} \right) \\ = f(0) \Delta_1(s) + D(s-1) - \sum_{\varrho \in Z(\zeta)} D(s-\varrho) + \Delta_2(s).$$

2.2. La fonction test \mathbf{f} . Nous noterons $\tilde{F}(X, Y)$ la partie réelle de la transformée de Laplace de f :

$$(9) \quad \tilde{F}(X, Y) = \Re \int_0^d e^{-(X+iY)t} f(t) dt.$$

En sus des conditions requises à f dans l'introduction, nous imposons à \tilde{F} de vérifier :

$$(H_2) \quad \tilde{F}(X, Y) \geq 0 \quad \text{si} \quad X \geq 0.$$

Heath-Brown propose une famille de fonctions (cf. lemme 7.5, [6]) dont nous ne savons pas si elles sont optimales pour notre problème, mais dont nous pensons qu'elles sont assez bien adaptées à notre méthode. Pour $\theta \in]\pi/2, \pi[$, nous définissons :

$$f(t) = \eta h_\theta(\eta t)$$

où h_θ est indépendante de η . Cette fonction est nulle en dehors de $[0, -2\theta/\tan \theta]$ et, pour u appartenant à cet intervalle, vaut

$$h_\theta(u) = (1 + \tan^2 \theta) \left[(1 + \tan^2 \theta) \left(\frac{-\theta}{\tan \theta} - \frac{u}{2} \right) \cos(u \tan \theta) + \frac{-2\theta}{\tan \theta} - u - \frac{\sin(2\theta + u \tan \theta)}{\sin(2\theta)} + 2 \left(1 + \frac{\sin(\theta + u \tan \theta)}{\sin \theta} \right) \right].$$

Nous avons alors

$$f(0) = \eta g_1(\theta),$$

où nous avons posé :

$$g_1(\theta) = (1 + \tan^2 \theta)(3 - \theta \tan \theta - 3\theta \cot \theta).$$

Nous prendrons $\theta = 1.848$ ce qui nous donnera

$$g_1(\theta) = 147.84112 + \mathcal{O}^*(10^{-5}),$$

où $u = \mathcal{O}^*(v)$ signifie $|u| \leq v$. Pour les besoins ultérieurs, nous définissons aussi

$$d(\theta, \eta) = \frac{d_1(\theta)}{\eta}, \quad \text{où } d_1(\theta) = \frac{-2\theta}{\tan \theta} = 1.05161 + \mathcal{O}^*(10^{-5}).$$

2.3. Une inégalité trigonométrique. Nous utilisons ici l'inégalité suivante :

$$\sum_{k=0}^4 a_k \cos(ky) = 8(0.91 + \cos y)^2(0.265 + \cos y)^2 \geq 0,$$

avec $a_0 = 10.91692658$, $a_1 = 18.63362$, $a_2 = 11.4517$, $a_3 = 4.7$, $a_4 = 1$,

$$\text{et } A = \sum_{k=1}^4 a_k = 35.78532.$$

En remarquant que $\sum_{n \geq 1} f(\log n) \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} \left(1 - \frac{\kappa}{n^\delta}\right) \sum_{k=0}^4 a_k \cos(k\gamma_0 \log n) \geq 0$,

nous obtenons grce à (8) l'inégalité fondamentale suivante :

$$(10) \quad \sum_{k=0}^4 a_k \left[f(0) \Delta_1(\sigma + ik\gamma_0) + D(\sigma - 1 + ik\gamma_0) - \sum_{\rho \in Z(\zeta)} D(\sigma + ik\gamma_0 - \rho) + \Delta_2(\sigma + ik\gamma_0) \right] \geq 0$$

Il reste donc à trouver des majorations pour chacun des termes ci-dessus. C'est l'objet du paragraphe suivant.

2.4. La région sans zéros. Les valeurs que nous donnons ici sont calculées pour $r = 5.94292$, $R = 9.645908801$. A la fin de ce paragraphe, la valeur $R = 5.942924086$ est donc licite et nous pouvons recommencer les calculs. Ce que nous avons fait, mais l'étape principale est la première et elle permet en outre au lecteur de vérifier nos résultats. Pour T_0 , nous prendrons la valeur de S.Wedeniowski, c'est à dire très exactement 3 330 657 430.697. (La valeur finale obtenue pour R_0 sera alors améliorée d'un centième par rapport à la valeur T_0 de te Riele et Winter.)

Commençons par le terme $\Delta_1(s)$: lorsque t est non nul, $\Re F'_\Gamma(\frac{s}{2} + 1)$ est de l'ordre de $\log t$ (voir (28) au paragraphe 3.3). Au paragraphe 4.2 nous établirons la proposition suivante :

Proposition 2.2. *Il existe une fonction $\mathcal{C}_1(\eta)$ qui vérifie*

$$f(0) \sum_{k=0}^4 a_k \Delta_1(\sigma + ik\gamma_0) \leq \frac{A}{2}(1 - \kappa)g_1(\theta)\eta \log \gamma_0 + \mathcal{C}_1(\eta).$$

On se reportera à (55), (56) et au lemme 4.5, pour la définition de $\mathcal{C}_1(\eta)$ et

$$\mathcal{C}_1(\eta) \leq -2704.319 \eta.$$

En ce qui concerne le terme $D(s)$, nous avons $\Re F(s - 1) = \tilde{F}(\sigma - 1, 0)$ lorsque $t = 0$. Sinon $\Re F(s - 1)$ est de l'ordre de η/t^2 (voir la proposition 4.6) et nous montrerons au paragraphe 4.3 que

Proposition 2.3. *Il existe une fonction $\mathcal{C}_2(\eta)$ qui vérifie*

$$\sum_{k=0}^4 a_k D(\sigma - 1 + ik\gamma_0) \leq a_0 \tilde{F}(\sigma - 1, 0) + \mathcal{C}_2(\eta)$$

La fonction $\mathcal{C}_2(\eta)$ est définie en (60) et

$$\mathcal{C}_2(\eta) \leq -1\,151.623 \eta + 1.360 \cdot 10^{-15} \eta^2 + 27\,424.672 \eta^3.$$

Le terme $\Delta_2(s)$ est un terme reste, de l'ordre de η^3 (voir le lemme 4.7). Nous montrerons au paragraphe 4.4 la proposition suivante :

Proposition 2.4. *Il existe une fonction $\mathcal{C}_4(\eta)$ qui vérifie*

$$\sum_{k=0}^4 a_k \Delta_2(\sigma + ik\gamma_0) \leq \mathcal{C}_4(\eta)$$

Les éléments qui définissent $\mathcal{C}_4(\eta)$ sont donnés en (64), (61) et (63) et

$$\mathcal{C}_4(\eta) \leq 2\,391\,006.764 \eta^3.$$

Nous en arrivons enfin au point essentiel, traité au paragraphe 4.1, qui est l'étude de la somme sur les zéros. Pour cela, en nous inspirant de l'idée de Stechkin basée sur la symétrie des zéros de ζ , nous pouvons réécrire la

première somme sous la forme :

$$\begin{aligned} \sum_{\varrho \in Z(\zeta)} D(s - \varrho) &= D(s - \varrho_0) + D(s - 1 + \bar{\varrho}_0) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\varrho \in Z(\zeta) \setminus \{\varrho_0, 1 - \bar{\varrho}_0\}} \left[D(s - \varrho) + D(s - 1 + \bar{\varrho}) \right]. \end{aligned}$$

La proposition 4.2 nous permettra d'éliminer une partie des termes de la somme grce au résultat suivant :

$$\begin{aligned} D(s - \varrho) + D(s - 1 + \bar{\varrho}) &\geq 0 \\ \text{si } 1 - \sigma < \beta < \sigma, \quad \kappa &= \kappa_0 \text{ et } \delta = \delta_0 \end{aligned}$$

où δ_0 est la solution de l'équation $\kappa_2(\delta) = \kappa_3(\delta)$, $\kappa_2(\delta)$ et $\kappa_3(\delta)$ étant respectivement définis en (36) et (37), et où κ_0 est la valeur de κ_2 en δ_0 . À un $\mathcal{O}(\eta_0)$ près, nous avons en fait que

$$\kappa_2(\delta) = \frac{1}{1 + 2\delta} \quad \text{et} \quad \kappa_3(\delta) = \frac{1}{\frac{1}{\delta} + \frac{1}{1+\delta}}$$

ce qui permet d'approcher δ_0 par $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.61803\dots$ et κ_0 par $\frac{1}{\sqrt{5}} = 0.44721\dots$. Plus exactement, nous trouvons $\delta_0 = 0.61963\dots$ et $\kappa_0 = 0.44213\dots$ pour $r = 5.94292$. Il reste alors à minorer la somme restante qui porte sur les zéros de partie réelle vérifiant $\sigma \leq \beta \leq 1$, ce qui revient à $\gamma \geq \gamma_0 + t_0$. Cette somme se trouve alors dépendre de la valeur t_0 . Nous verrons à la proposition 4.4 comment la minorer et nous obtiendrons finalement :

Proposition 2.5. *Il existe une fonction \mathcal{C}_3 qui vérifie*

$$\sum_{k=0}^4 a_k \sum_{\varrho \in Z(\zeta)} D(\sigma + ik\gamma_0 - \varrho) \geq a_1 \tilde{F}(\sigma - \beta_0, 0) - \mathcal{C}_3(\eta)$$

Pour une définition explicite de \mathcal{C}_3 , nous nous reporterons à (4.1.2). En attendant, nous pouvons toujours voir que :

$$\mathcal{C}_3(\eta) \leq 413.187\eta + 3\,275.500\eta^2 + 73\,082.749\eta^3.$$

Finalement, en notant $\mathcal{C}(\eta) = \mathcal{C}_1(\eta) + \mathcal{C}_2(\eta) + \mathcal{C}_3(\eta) + \mathcal{C}_4(\eta)$, nous tirons de l'inégalité fondamentale (10) :

$$0 \leq \frac{A}{2}(1 - \kappa)g_1(\theta)\eta \log \gamma_0 + a_0 \tilde{F}(\sigma - 1, 0) - a_1 \tilde{F}(\sigma - \beta_0, 0) + \mathcal{C}(\eta)$$

soit encore

$$\eta \log \gamma_0 \geq \frac{a_1 \tilde{F}(\sigma - \beta_0, 0) - a_0 \tilde{F}(\sigma - 1, 0) - \mathcal{C}(\eta)}{\frac{A}{2}g_1(\theta)(1 - \kappa)}$$

En fait, $\mathcal{C}(\eta)$ s'écrit sous la forme :

$$(11) \quad \alpha_1 \eta + \alpha_2 \eta^2 + \alpha_3 \eta^3,$$

$$(12) \quad \text{où } \alpha_1 = -3\,442.756, \quad \alpha_2 = 3\,275.500, \quad \alpha_3 = 2\,491\,514.184.$$

Comme α_1 est une constante négative et α_2 et α_3 deux constantes positives, on voit facilement que $\mathcal{C}(\eta)$ admet trois racines réelles dont une égale à zéro et les deux autres de signes opposés. $\mathcal{C}(\eta)$ est donc successivement négatif puis positif sur $[0, +\infty[$ et on obtient que $\mathcal{C}(\eta)$ est négatif sur $[0, \eta_0]$ en vérifiant que $\mathcal{C}(\eta_0)$ l'est : nous trouvons $\mathcal{C}(\eta_0) = -25.1013\dots$

La constante cherchée est ainsi donnée par

$$(13) \quad \frac{a_1 \tilde{F}(\sigma - \beta_0, 0) - a_0 \tilde{F}(\sigma - 1, 0)}{\frac{A}{2} g_1(\theta)(1 - \kappa)}$$

qu'on optimise en σ . En notant $\omega = \frac{1-\sigma}{\eta}$, le terme $a_1 \tilde{F}(\sigma - \beta_0, 0) - a_0 \tilde{F}(\sigma - 1, 0)$ s'avère tre une fonction de ω que nous noterons K :

$$K(\omega) = \int_0^{d_1(\theta)} (a_1 e^{-t} - a_0) h_\theta(t) e^{\omega t} dt$$

K est une fonction croissante sur $[0, 1]$, qui atteint donc sa plus grande valeur en $\omega_0 = 0.57947$, en vertu des hypothèses faites sur σ et η . Les données initiales $r = 5.94292$, $R = 9.645908801$ nous amène à $R_0 = 5.942924085\dots$ Nous allons optimiser notre résultat en réitérant les calculs : remplaçons R par la valeur R_0 que nous venons de trouver et r par une valeur supérieure à celle que nous venons d'utiliser mais inférieure au futur R_0 (nous procédons par tatonnement). Les valeurs successives de r et R que nous obtenons ainsi forment deux suites décroissantes qui semblent tendre vers une valeur commune. Nous avons choisi de nous arrêter à une précision de 10^{-5} pour la constante R_0 , c'est à dire à la sixième étape.

Nous donnons ci-dessous les valeurs successives prises pour r et R , ainsi que celles des paramètres η_0 , κ et δ impliqués, et enfin celles trouvées pour R_0 .

R	r	$\eta_0 \cdot 10^3$	κ	δ	R_0
9.645908801	5.94292	7.67418...	0.44213...	0.61963...	5.942924085...
5.942924086	5.72033	7.97280...	0.43927...	0.62051...	5.720337335...
5.720337336	5.69922	8.00233...	0.43898...	0.62060...	5.699223506...
5.699223507	5.69714	8.00525...	0.43895...	0.62061...	5.697149421...
5.697149422	5.69694	8.00553...	0.43895...	0.62061...	5.696944342...
5.696944343	5.69692	8.00556...	0.43895...	0.62061...	5.696924085...

Nous pouvons ainsi prendre $R_0 = 5.69693$. Nous remarquerons que cette valeur est assez proche de la valeur optimale calculée en $\omega = \frac{r}{R}$ et qui vaut $5.652175155\dots$

Les calculs ont été menés à la fois sous MAPLE et sous PARI / GP avec une précision de 10^{-28} et dans chacun des cas, nous retrouvons les résultats annoncés.

Nous précisons qu' en utilisant le polynme de Rosser et Schoenfeld, c'est à dire $8(0.9126 + \cos y)^2(0.2766 + \cos y)^2$, et en prenant $\theta = 1.848$, nous trouvons pour R_0 la valeur $5.697331650\dots$

D'autre part, en ce qui concerne le choix de la valeur de θ , nous remarquons que le terme final étudié (13) $\frac{A g_1(\theta)}{K(\omega)}$, est en fait une fonction dépendant

uniquement des trois paramètres r , R et θ . Pour chaque étape décrite précédemment, c'est à dire pour chaque r et R choisi, nous pouvons donc calculer la valeur de θ en laquelle (13) est optimal.

En prenant pour données initiales $r = 5.93943$, $R = 9.645908801$, nous trouvons ainsi qu'en $\theta = 1.85390$, la valeur R_0 vaut $5.939431920\dots$ et en réitérant le procédé :

R	9.645908801	5.93944	5.71999	5.69919	5.69715	5.69695	5.69693
r	5.93943	5.71998	5.69918	5.69714	5.69694	5.69692	5.69692
θ	1.85390	1.84851	1.84802	1.84797	1.84796	1.84796	1.84796
R_0	5.93944	5.71999	5.69919	5.69715	5.69695	5.69693	5.69693

Finalement, nous avons choisi par souci de clarté de fixer la valeur de θ à 1.848, d'autant plus que cela n'influe pas sur la précision donnée au résultat final.

3. PRÉLIMINAIRES.

Cette partie se décompose elle-même en deux. Tout d'abord nous établissons une formule explicite assez générale. Ensuite, nous étudions plus en détails la fonction \tilde{F} introduite en (9).

3.1. Formule explicite.

Théorème 3.1. *Soit ϕ une fonction à valeurs complexes définie sur la droite réelle qui vérifie les conditions (A) et (B) suivantes :*

- (A) ϕ est continue et continuellement dérivable sur \mathbb{R} sauf en un nombre fini de points a_i où $\phi(x)$ et sa dérivée $\phi'(x)$ n'ont que des discontinuités de première espèce et pour lesquels ϕ vérifie la condition de la moyenne (i.e $\phi(a_i) = \frac{1}{2}[\phi(a_i + 0) + \phi(a_i - 0)]$).
- (B) Il existe $b > 0$ tel que $\phi(x)e^{x/2}$ et $\phi'(x)e^{x/2}$ soient $\mathcal{O}(e^{-(1/2+b)|x|})$ au voisinage de l'infini.

Pour tout réel $a < 1$, vérifiant $0 < a < b$, $\phi(x)$ possède alors une transformée de Laplace

$$\Phi(s) = \int_0^{+\infty} \phi(x)e^{-sx} dx$$

qui est holomorphe dans la bande $-(1+a) < \sigma < a$ et qui est $\mathcal{O}(1/|t|)$ uniformément dans la bande $-(1+a) \leq \sigma \leq a$.

Soient q un entier non nul et χ un caractère primitif de Dirichlet modulo q .

Notons $\delta_{q,1} = \begin{cases} 0 & \text{si } q = 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ et $\mathbf{a} = \begin{cases} 0 & \text{si } \chi(-1) = 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \Lambda(n) \chi(n) \phi(\log n) &= \delta_{q,1} (\Phi(-1) + \Phi(0)) + \frac{1}{2} (1 - \delta_{q,1}) (1 - \mathbf{a}) \Phi(0) \\ &\quad - \sum_{\varrho \in Z(\chi)} \Phi(-\varrho) + \phi(0) \log \frac{q}{\pi} + \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n) \bar{\chi}(n)}{n} \phi(-\log n) \\ &\quad + \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2i\pi} \int_{1/2-iT}^{1/2+iT} \Re e \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{s + \mathbf{a}}{2} \right) \Phi(-s) ds \end{aligned}$$

Preuve.

D'après le théorème d'inversion de Laplace :

$$\phi(\log n) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-(1+a)-i\infty}^{-(1+a)+i\infty} \Phi(s) n^s ds \quad (n \geq 1).$$

Ainsi, par définition de $\frac{L'}{L}(s, \chi)$ pour $\sigma > 1$ et grce au changement de variable $s \mapsto -s$, nous pouvons écrire :

$$(14) \quad \sum_{n \geq 1} \Lambda(n) \chi(n) \phi(\log n) = \frac{1}{2i\pi} \int_{1+a-i\infty}^{1+a+i\infty} -\frac{L'}{L}(s, \chi) \Phi(-s) ds.$$

Soit $T > 0$, notons $I(T)$ l'intégrale :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{1+a-iT}^{1+a+iT} -\frac{L'}{L}(s, \chi) \Phi(-s) ds.$$

L'intégration de $-\frac{L'}{L}(s, \chi) \Phi(-s)$ sur le contour du rectangle formé par les droites $\sigma = 1 + a, \sigma = -a, t = T, t = -T$ permet de réécrire $I(T)$:

$$\begin{aligned} (15) \quad I(T) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{-a-iT}^{-a+iT} -\frac{L'}{L}(s, \chi) \Phi(-s) ds \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{-a+iT}^{1+a+iT} -\frac{L'}{L}(s, \chi) \Phi(-s) ds \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{-a-iT}^{1+a-iT} -\frac{L'}{L}(s, \chi) \Phi(-s) ds \\ &\quad - \left(-\delta_{q,1} \Phi(-1) + \frac{1}{2} (1 - \delta_{q,1}) (1 - \mathbf{a}) \Phi(0) + \sum_{\varrho \in Z(\zeta)} \Phi(-\varrho) \right) \end{aligned}$$

Grâce à la condition (B), les deux dernières intégrales tendent vers 0 lorsque T tend vers ∞ . De plus, l'équation fonctionnelle de L :

$$-\frac{L'}{L}(s, \chi) = \log \frac{q}{\pi} - \frac{L'}{L}(1-s, \bar{\chi}) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{s + \mathbf{a}}{2} \right) + \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{1-s + \mathbf{a}}{2} \right) \right\}$$

permet de décomposer la première intégrale en la somme des trois intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} I_1(T) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{-a-iT}^{-a+iT} \log \frac{q}{\pi} \Phi(-s) ds \\ I_2(T) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{-a-iT}^{-a+iT} -\frac{L'}{L} (1-s, \bar{\chi}) \Phi(-s) ds \\ I_3(T) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{-a-iT}^{-a+iT} \frac{1}{2} \left\{ \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{s+\mathbf{a}}{2} \right) + \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{1-s+\mathbf{a}}{2} \right) \right\} \Phi(-s) ds \end{aligned}$$

D'une part, le théorème d'inversion de Laplace permet d'écrire :

$$(16) \quad \lim_{T \rightarrow +\infty} I_1(T) = \phi(0) \log \frac{q}{\pi}$$

D'autre part, le développement de $-\frac{L'}{L}$ en série de Dirichlet donne :

$$(17) \quad \lim_{T \rightarrow +\infty} I_2(T) = \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n) \bar{\chi}(n)}{n} \phi(-\log n)$$

En ce qui concerne I_3 , déplaçons la droite d'intégration vers la droite $\sigma = 1/2$ sur laquelle Γ vérifie :

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{s+\mathbf{a}}{2} \right) + \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{1-s+\mathbf{a}}{2} \right) \right\} = \Re \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{s+\mathbf{a}}{2} \right)$$

Grâce à la condition (B), nous obtenons :

$$(18) \quad \lim_{T \rightarrow +\infty} I_3(T) = \frac{1}{2i\pi} \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{1/2-iT}^{1/2+iT} \Re \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{s+\mathbf{a}}{2} \right) \Phi(-s) ds + (1-\mathbf{a})\Phi(0)$$

Et (14), (15), (16), (17) et (18) donnent ainsi l'égalité annoncée. \square

Pour obtenir (7), il ne reste plus qu'à prendre la partie réelle dans la formule du théorème 3.1 dans le cas $q = 1$ et $s = \sigma + it$, où a priori $\sigma > 1$, et

$$\phi(y) = \begin{cases} (f(0) - f(y))e^{-ys} & \text{si } y \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ϕ est alors une fonction de classe C^2 sur \mathbb{R} qui vérifie bien la condition (B) et on a pour $\Re z < \Re s$:

$$\begin{aligned} \Phi(-z) &= \frac{f(0)}{s-z} - F(s-z) = -\frac{F_2(s-z)}{(s-z)^2}, \\ \Phi(0) &= -\frac{F_2(s)}{s^2}, \quad \Phi(-1) = \frac{f(0)}{s-1} - F(s-1) \end{aligned}$$

où F_2 est la transformée de Laplace de f''' . Il vient alors

$$(19) \quad \Re \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s} f(\log n) = f(0) \Re \left(\sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s} - \frac{1}{s-1} + \sum_{\rho \in Z(\zeta)} \frac{1}{s-\rho} \right) \\ + \Re F(s-1) - \sum_{\rho \in Z(\zeta)} \Re F(s-\rho) \\ + \Re \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} \Re \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{z}{2} \right) \frac{F_2(s-z)}{(s-z)^2} dz + \frac{F_2(s)}{s^2} \right)$$

La formule d'Hadamard (voir [2]) permet de réécrire le terme facteur de $f(0)$:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = -B - \frac{\log \pi}{2} + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{s}{2} + 1 \right) - \sum_{\rho \in Z(\zeta)} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{s-\rho} \right)$$

or $\Re B = -\sum_{\rho \in Z(\zeta)} \Re \frac{1}{\rho}$ donc

$$\Re \left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - \frac{1}{s-1} + \sum_{\rho \in Z(\zeta)} \frac{1}{s-\rho} \right) = -\frac{\log \pi}{2} + \frac{1}{2} \Re \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{s}{2} + 1 \right)$$

L'identité (19) devient :

$$\Re \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s} f(\log n) = f(0) \left(-\frac{1}{2} \log(\pi) + \frac{1}{2} \Re \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{s}{2} + 1 \right) \right) \\ + \Re F(s-1) - \sum_{\rho \in Z(\zeta)} \Re F(s-\rho) \\ + \Re \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} \Re \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{z}{2} \right) \frac{F_2(s-z)}{(s-z)^2} dz + \frac{F_2(s)}{s^2} \right)$$

Nous avons ici une égalité entre deux fonctions harmoniques sur le demi-plan $\Re s > 1$, mais les deux membres définissent des fonctions sur \mathbb{C} tout entier (l'introduction de la partie réelle ôte les problèmes de convergence) ce qui fait que l'égalité reste vraie sur \mathbb{C} . Ceci achève la démonstration de la proposition 2.1.

3.2. Étude de \tilde{F} . Nous étudions dans ce paragraphe le comportement de la fonction \tilde{F} qui, rappelons-le, dépend des paramètres θ et η :

$$\tilde{F}(x, y) = \int_0^{d_1(\theta)/\eta} e^{-xt} \cos(yt) f(t) dt = \int_0^{d_1(\theta)} \exp\left(\frac{-xt}{\eta}\right) \cos\left(\frac{yt}{\eta}\right) h_\theta(t) dt.$$

Nous avons fixé $\theta = 1.848$ et les résultats numériques donnés ici sont calculés pour cette valeur.

Lemme 3.2. *Nous avons*

$$\tilde{F}(x, y) = \eta g_1(\theta) \frac{x}{x^2 + y^2} + H(x, y)$$

où la fonction H vérifie

$$|H(x, y)| \leq \frac{M(x/\eta)\eta^2}{x^2 + y^2}, \quad \text{avec} \quad M(z) = \int_0^{d_1(\theta)} |h_\theta''(u)| e^{-zu} du.$$

De plus lorsque $0 \leq z \leq \frac{1}{d_1(\theta)}$, nous avons le développement suivant :

$$521.632 - 212.574z \leq M(z) \leq 521.633 - 212.573z + 68.113z^2,$$

Sinon, la majoration par m/z donne une approximation de M suffisante où

$$m = \max_{u \in [0, d_1(\theta)]} |h_\theta''(u)| = |h_\theta''(0)| = 1322.86625\dots$$

Preuve.

Rappelons que :

$$F(s) = \frac{f(0)}{s} + \frac{F_2(s)}{s^2}$$

où F_2 est la transformée de laplace de f'' . Donc :

$$\begin{aligned} \tilde{F}(x, y) &= \Re \left[\frac{f(0)}{x + iy} + \frac{1}{(x + iy)^2} \int_0^{d(\theta, \eta)} e^{-(x+iy)t} f''(t) dt \right] \\ &= f(0) \frac{x}{x^2 + y^2} + \int_0^{d(\theta, \eta)} \frac{(x^2 - y^2) \cos(ty) - 2xy \sin(ty)}{(x^2 + y^2)^2} e^{-xt} f''(t) dt \end{aligned}$$

Notons H le reste et majorons le :

$$(20) \quad H(x, y) = \int_0^{d(\theta, \eta)} \frac{(x^2 - y^2) \cos(ty) - 2xy \sin(ty)}{(x^2 + y^2)^2} e^{-xt} f''(t) dt.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz nous donne

$$|(x^2 - y^2) \cos(ty) - 2xy \sin(ty)| \leq \sqrt{(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2} = x^2 + y^2$$

et par conséquent

$$|H(x, y)| \leq \frac{1}{x^2 + y^2} \int_0^{d(\theta, \eta)} e^{-xt} |f''(t)| dt$$

Par définition de f , $f''(t) = \eta^3 h_\theta''(\eta t)$, donc un changement de variable donne que l'intégrale de droite est égale à $\eta^2 \int_0^{d_1(\theta)} |h_\theta''(u)| e^{-\frac{x}{\eta}u} du = \eta^2 M\left(\frac{x}{\eta}\right)$.

De plus, les inégalités élémentaires $1 - zu \leq e^{-zu} \leq 1 - zu + \frac{(zu)^2}{2}$, nous donnent l'encadrement annoncé pour $M(z)$, ce qui achève la démonstration du lemme. \square

Nous aurons besoin au paragraphe 4.1 d'une estimation plus précise de $H(x, y)$ lorsque y tend vers l'infini :

Lemme 3.3. *Nous avons*

$$|H(x, y)| \leq m\eta^3 \frac{|x||x^2 - 3y^2|}{(x^2 + y^2)^3} + \frac{M_1(x/\eta)\eta^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

avec $M_1(z) = \int_0^{d_1(\theta)} |h_\theta^{(3)}(u)| e^{-zu} du.$

De plus lorsque $0 \leq z \leq \frac{1}{d_1(\theta)}$, nous avons le développement suivant :

$$2526.445 - 1087.743z \leq M_1(z) \leq 2526.446 - 1087.742z + 348.808z^2,$$

Si on, la majoration par m_1/z donne une approximation de M_1 suffisante avec

$$m_1 = \max_{u \in [0, d_1(\theta)]} |h_\theta^{(3)}(u)| = 4135.12706\dots$$

Preuve.

En intégrant par parties

$$H(x, y) = \Re \left(\frac{1}{(x + iy)^2} \int_0^{d(\theta, \eta)} e^{-(x+iy)t} f''(t) dt \right)$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} H(x, y) &= \Re \left(\frac{f''(0)}{(x + iy)^3} + \frac{1}{(x + iy)^3} \int_0^{d(\theta, \eta)} e^{-(x+iy)t} f^{(3)}(t) dt \right) \\ &= f''(0) \frac{x(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3} \\ &\quad + \int_0^{d(\theta, \eta)} \frac{x(x^2 - 3y^2) \cos(yt) - y(y^2 - 3x^2) \sin(yt)}{(x^2 + y^2)^3} e^{-xt} f^{(3)}(t) dt \end{aligned}$$

En achevant la preuve comme celle du lemme 3.2, nous montrons ainsi que :

$$H(x, y) \leq h_\theta''(0) \eta^3 \frac{|x||x^2 - 3y^2|}{(x^2 + y^2)^3} + \frac{\eta^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \int_0^{d_1(\theta)} |h_\theta^{(3)}(u)| e^{-\frac{x}{\eta}u} du$$

□

Dorénavant, nous opérons à $y \geq 0$ fixé. D'après le résultat ci-dessus, nous pouvons espérer que, pour $x \in [0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \tilde{F}(x, y)$ se comporte comme la fonction $x \mapsto \frac{x}{x^2 + y^2}$, c'est à dire qu'elle croisse jusqu'à une valeur proche de y puis décroisse ensuite. Lorsque $y = 0$, il est immédiat de voir que la fonction est décroissante et tend vers 0 en l'infini. Lorsque y est strictement positif, on a le lemme suivant:

Lemme 3.4. *Pour tout $y > 0$ l'application $\tilde{F}(\cdot, y)$ décroît sur $[x_2(\eta, y), +\infty[$ avec $x_2(\eta, y) = \varepsilon_3(\eta) + \sqrt{y^2 + \varepsilon_3^2(\eta)}$, $\varepsilon_3(\eta) = 7.857\eta$. Par ailleurs, pour tout $y > 0$ l'application $\tilde{F}(\cdot, y)$ croît sur $[0, x_1(\eta, y)]$ avec $x_1(\eta, y) = \frac{1}{2}y - \varepsilon_1(\eta) + \sqrt{(\frac{1}{2}y - \varepsilon_1(\eta))^2 - \varepsilon_2(\eta)}$ pourvu que la quantité sous la racine soit positive ou nulle, où nous avons posé $\varepsilon_1(\eta) = 4.99\eta$ et $\varepsilon_2(\eta) = 5.735\eta$.*

Preuve.

Reprenons H de la démonstration précédente donné par (20). Il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} H(x, y) = \int_0^{d(\theta, \eta)} \left(-t \frac{(x^2 - y^2) \cos(ty) - 2xy \sin(ty)}{(x^2 + y^2)^2} \right. \\ \left. - 2 \frac{x(x^2 - 3y^2) \cos(ty) - y(3x^2 - y^2) \sin(ty)}{(x^2 + y^2)^3} \right) e^{-xt} f''(t) dt. \end{aligned}$$

Nous utilisons encore l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour montrer que :

$$|2x(x^2 - 3y^2) \cos(ty) - 2y(3x^2 - y^2) \sin(ty)| \leq 2(x^2 + y^2)^{3/2}$$

ainsi que le lemme 3.2 pour obtenir

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial x} H(x, y) \right| &\leq \int_0^{d(\theta, \eta)} |f''(t)| \left(\frac{t}{x^2 + y^2} + \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right) e^{-xt} dt \\ &= \eta \frac{M_2(x/\eta)}{x^2 + y^2} + 2\eta^2 \frac{M(x/\eta)}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

$$\text{où } M_2(z) = \int_0^{d_1(\theta)} |h''_\theta(u)| u e^{-zu} du \leq \|uh''_\theta\|_\infty / z.$$

Supposons $x \geq y$. Puisque

$$(21) \quad \frac{\partial}{\partial x} \tilde{F}(x, y) = g_1(\theta) \eta \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{\partial}{\partial x} H(x, y)$$

nous pouvons garantir que $\frac{\partial}{\partial x} F(x, y) \leq 0$ dès que

$$g_1(\theta)(y^2 - x^2) + M_2(x/\eta)(x^2 + y^2) + 2\eta M(x/\eta) \sqrt{x^2 + y^2} \leq 0$$

ce qui est impliqué par

$$g_1(\theta)(y^2 - x^2) + 2\eta(\|uh''_\theta\|_\infty + \sqrt{2}\|h''_\theta\|_1)x \leq 0$$

avec $\|uh''_\theta\|_\infty \leq 423.867$ et $\|h''_\theta\|_1 \leq 521.633$.

$$x \geq x_2(\eta, y) = \varepsilon_3(\eta) + \sqrt{y^2 + \varepsilon_3^2(\eta)}$$

$$\text{avec } \varepsilon_3(\eta) = 7.857\eta \geq \frac{\|uh''_\theta\|_\infty + \sqrt{2}\|h''_\theta\|_1}{g_1(\theta)} \eta.$$

À partir de (21), nous pouvons aussi garantir que $\frac{\partial}{\partial x} F(x, y) \geq 0$ dès que $x \leq y$

$$\text{et } g_1(\theta)(y^2 - x^2) - M_2(x/\eta)(x^2 + y^2) - 2\eta M(x/\eta) \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$$

ce qui est impliqué par

$$g_1(\theta)(y^2 - x^2) - \eta\|uh''_\theta\|_\infty \frac{2y^2}{x} - 2\sqrt{2}\eta\|h''_\theta\|_1 y \geq 0.$$

Comme nous n'aurons pas besoin d'un résultat très performant, nous nous contentons de noter que $y^2 - xy \leq y^2 - x^2$, ce qui nous laisse avec

$$g_1(\theta)(y - x)x - 2\eta\|uh''_\theta\|_\infty y - 2\sqrt{2}\eta\|h''_\theta\|_1 x \geq 0$$

et il nous suffit maintenant d'avoir

$$x^2 - (y - 9.980\eta)x + 5.735\eta y \leq 0.$$

□

3.3. **Étude de $\Re \frac{\Gamma'}{\Gamma}$.** Dans la suite nous allons avoir besoin d'une estimation du terme $\Re \frac{\Gamma'}{\Gamma}$ pour étudier les termes Δ_1 et Δ_2 . C'est l'objet des deux lemmes suivants.

Lemme 3.5. *Soient $\delta \in [0, 1]$, $\kappa \in [0, x/(x + \delta)]$ et $0 < x_0 \leq x \leq x_1 < y_0$, alors :*

$$\begin{aligned} & \Re \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{x}{2} + i \frac{y}{2} \right) - \kappa \Re \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{x + \delta}{2} + i \frac{y}{2} \right) \\ & \leq \begin{cases} r_1(x_0, x_1, y_0) & \text{si } 0 < |y| < y_0 \\ (1 - \kappa) \log \frac{y}{2} + \min(r_2(x_0, x_1, y_0), r_3(x_0, x_1, y_0)) & \text{si } |y| \geq y_0 \end{cases} \end{aligned}$$

o r_1 , r_2 et r_3 sont respectivement définis en (25), (27), (30).

Preuve.

Pour la suite, notons $\psi_{\kappa, \delta}(x, y)$ la différence $\Re \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{x}{2} + i \frac{y}{2} \right) - \kappa \Re \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{x + \delta}{2} + i \frac{y}{2} \right)$. Nous allons approcher le terme $\Re \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{x}{2} + i \frac{y}{2} \right)$ de deux façons différentes qui sont plus ou moins efficaces selon la taille de $|y|$.

Utilisons l'identité donnée par K.Mc.Curley (Cf. [10]) :

$$(22) \quad \Re \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{x}{2} + i \frac{y}{2} \right) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} \right) - \frac{x}{x^2 + y^2} + \Re \int_0^{+\infty} \frac{(u - [u] - 1/2)}{\left(u + \frac{x + iy}{2}\right)^2} du$$

avec le terme intégral qui satisfait :

$$(23) \quad \Re \int_0^{+\infty} \left| \frac{(u - [u] - 1/2)}{\left(u + \frac{x + iy}{2}\right)^2} \right| du \leq \frac{1}{y} \arctan \frac{y}{x}, \quad \text{pour } x > 0.$$

(22) permet ainsi de majorer $\psi_{\kappa, \delta}(x, y)$ par $R_1(x, y)$ défini par :

$$(24) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2} \log \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} \right) - \frac{\kappa}{2} \log \left(\frac{(x + \delta)^2}{4} + \frac{y^2}{4} \right) \\ & - \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - \kappa \frac{x + \delta}{(x + \delta)^2 + y^2} \right) + \frac{1}{y} \left(\arctan \frac{y}{x} + \kappa \arctan \frac{y}{x + \delta} \right) \end{aligned}$$

Nous allons maintenant distinguer les cas où y est borné ($0 < |y| < y_0$) et où y est "grand" ($|y| \geq y_0$). Dans le premier cas, nous majorons $\frac{1}{y} \arctan \frac{y}{x}$ par $\frac{1}{x}$ et nous obtenons

$$(25) \quad \begin{aligned} R_1(x, y) \leq r_1(x_0, x_1, y_0) &= \frac{1 - \kappa}{2} \log \left(\frac{(x_1 + \delta)^2}{4} + \frac{y_0^2}{4} \right) \\ & - \frac{x_0}{x_1^2 + y_0^2} + \frac{1}{x_0} + \frac{2\kappa}{x_0 + \delta} \quad \text{si } 0 < |y| < y_0 \end{aligned}$$

Dans le second cas, $\Re \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{x}{2} + i \frac{y}{2} \right)$ peut être approché par $\log |y|$. Nous réécrivons $R_1(x, y)$:

$$R_1(x, y) = (1 - \kappa) \log \frac{|y|}{2} + R_2(x, y)$$

$$(26) \quad \text{avec} \quad R_2(x, y) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{x^2}{y^2} + 1 \right) - \frac{\kappa}{2} \log \left(\frac{(x + \delta)^2}{y^2} + 1 \right) \\ - \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - \kappa \frac{x + \delta}{(x + \delta)^2 + y^2} \right) + \frac{1}{y} \left(\arctan \frac{y}{x} + \kappa \arctan \frac{y}{x + \delta} \right)$$

Comme l'application $y \mapsto \frac{1}{y} \arctan \frac{y}{x}$ est positive et décroissante ainsi que $y \mapsto \frac{x}{x^2 + y^2} - \kappa \frac{x + \delta}{(x + \delta)^2 + y^2}$ puisque $\kappa \leq \frac{x}{x + \delta}$, nous obtenons pour le terme d'erreur :

$$(27) \quad R_2(x, y) \leq r_2(x_0, x_1, y_0) = \frac{1 - \kappa}{2} \log \left(\frac{(x_1 + \delta)^2}{y_0^2} + 1 \right) + \frac{1}{y_0} \left(\arctan \frac{y_0}{x_1} \right. \\ \left. + \kappa \arctan \frac{y_0}{x_1 + \delta} \right) \quad \text{si } |y| \geq y_0$$

L'égalité suivante donne une autre majoration pour le terme d'erreur :

$$(28) \quad \Re \frac{\Gamma'}{\Gamma}(x + iy) = \log |y| - \frac{x}{2(x^2 + y^2)} + R(x, y) \quad (y^2 > x^2, x > 0)$$

$$\text{avec} \quad |R(x, y)| \leq \frac{1}{12x|y|} + \frac{x^2}{2y^2}$$

Et donc :

$$\psi_{\kappa, \delta}(x, y) \leq (1 - \kappa) \log \frac{|y|}{2} + R_3(x, y) \leq (1 - \kappa) \log \frac{|y|}{2} + r_3(x_0, x_1, y_0)$$

$$(29) \quad \text{avec} \quad R_3(x, y) = - \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - \kappa \frac{x + \delta}{(x + \delta)^2 + y^2} \right) + \frac{1}{3y} \left(\frac{1}{x} + \frac{\kappa}{x + \delta} \right) \\ + \frac{1}{2y^2} (x^2 + \kappa(x + \delta)^2)$$

$$(30) \quad r_3(x_0, x_1, y_0) = \frac{1}{3y_0} \left(\frac{1}{x_0} + \frac{\kappa}{x_0 + \delta} \right) + \frac{1}{2y_0^2} (x_1^2 + \kappa(x_1 + \delta)^2)$$

□

Lemme 3.6. *Nous avons :*

$$\left| \Re \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{1}{4} + i \frac{T}{2} \right) \right| \leq U_0(T) = \begin{cases} \frac{1}{2} \log \left(\frac{16}{1+4T^2} \right) + \frac{2}{1+4T^2} + 2 & \text{si } |T| < 1/2, \\ \left| \log \frac{|T|}{2} - \frac{2}{1+4T^2} \right| + \frac{2}{3|T|} + \frac{1}{8T^2} & \text{si } |T| \geq 1/2. \end{cases}$$

Preuve.

Pour la suite, nous désignerons par $R_i(T)$ l'application $T \mapsto R_i(1/2, T, 0, 0)$.

- (1) Si $|T| < 1/2$, nous appliquons la formule (22) pour $x = 1/2$ et $y = T$ puis utilisons la majoration (23) :

$$(31) \quad \left| \Re \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{1}{4} + i \frac{T}{2} \right) \right| \leq \left| \frac{1}{2} \log \left(\frac{1}{16} + \frac{T^2}{4} \right) - \frac{2}{1+4T^2} \right| + \frac{1}{T} \arctan(2T).$$

En observant que :

$$\frac{1}{T} \arctan(2T) \leq 2,$$

on obtient alors que

$$(32) \quad \left| \Re \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{1}{4} + i \frac{T}{2} \right) \right| \leq \frac{1}{2} \log \left(\frac{16}{1+4T^2} \right) + \frac{2}{1+4T^2} + 2$$

- (2) Si $|T| \geq 1/2$, l'égalité (28) nous donne :

$$\Re \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{1}{4} + i \frac{T}{2} \right) = \log \frac{|T|}{2} - \frac{2}{1+4T^2} + R \left(\frac{1}{4}, \frac{|T|}{2} \right)$$

et donc

$$(33) \quad \left| \Re \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{1}{4} + i \frac{T}{2} \right) \right| \leq \left| \log \frac{|T|}{2} - \frac{2}{1+4T^2} \right| + \frac{2}{3|T|} + \frac{1}{8T^2}$$

□

4. PREUVES

Dans ce paragraphe, nous commençons par étudier la somme sur les zéros de Zêta. Le résultat fondamental de la proposition 4.2 permet de régler le cas des zéros de partie réelle parcourant $[1 - \sigma, \sigma]$ par un argument de positivité.

Nous introduisons à cette occasion les conditions numériques suivantes sur les paramètres κ et δ :

$$0 \leq \kappa \leq 0.44214 \quad \text{et} \quad \delta \geq 0.61962,$$

ce qui nous permet d'obtenir les approximations numériques annoncées aux propositions 2.2, 2.3, 2.4 et 2.5.

Nous rappelons à cette occasion les valeurs que nous avons fixées pour les paramètres de départ T_0 , R , θ et r :

$$T_0 = 3330657430.697, \quad R = 9.645908801, \\ \theta = 1.848, \quad r = 5.94292,$$

ainsi que celles que nous obtenons pour les variables intermédiaires dont nous avons besoin ici :

$$g_1(\theta) = 147.84112\dots, \quad \sigma_0 = 0.99555\dots, \quad \eta_0 = 0.00767\dots, \\ m = 1322.86625\dots, \quad m_1 = 4135.12706\dots, \\ M(0) = 521.63246\dots, \quad M(-r/R) = 682.83971\dots$$

4.1. Étude de la somme sur les zéros - Preuve de la proposition

2.5. Nous cherchons à localiser le zéro $\varrho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$. Pour cela, et c'est l'objet de ce premier paragraphe, nous l'isolons dans la somme

$$\sum_{k=0}^4 a_k \sum_{\varrho \in Z(\zeta)} D(\sigma + ik\gamma_0 - \varrho).$$

4.1.1. *Cas $k = 1$ et $\varrho \in \{\varrho_0, 1 - \bar{\varrho}_0\}$* : Le terme $D(\sigma - \beta_0) + D(\sigma - 1 + \beta_0)$ donné par

$$\begin{aligned} D(\sigma - \beta_0) &= \tilde{F}(\sigma - \beta_0, 0) - \kappa \tilde{F}(\sigma - \beta_0 + \delta, 0) \\ \text{et } D(\sigma - 1 + \beta_0) &= \tilde{F}(\sigma - 1 + \beta_0, 0) - \kappa \tilde{F}(\sigma - 1 + \beta_0 + \delta, 0) \end{aligned}$$

est en fait proche de $\tilde{F}(\sigma - \beta_0, 0)$ à un $\mathcal{O}(\eta)$ près.

En effet, d'après la décroissance de l'application $x \mapsto \tilde{F}(x, 0)$ et le lemme 3.2, nous avons :

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\sigma - 1 + \beta_0 + \delta, 0) \leq \tilde{F}(\sigma_0 - \eta_0 + \delta, 0) &\leq \frac{g_1(\theta)}{\sigma_0 - \eta_0 + \delta} \eta + \frac{m}{(\sigma_0 - \eta_0 + \delta)^3} \eta^3 \\ \tilde{F}(\sigma - \beta_0 + \delta, 0) &\leq \tilde{F}(\delta, 0) \leq \frac{g_1(\theta)}{\delta} \eta + \frac{m}{\delta^3} \eta^3 \\ \tilde{F}(\sigma - 1 + \beta_0, 0) &\geq \tilde{F}(1, 0) \geq g_1(\theta) \eta - m \eta^3 \end{aligned}$$

Et donc :

$$(34) \quad \begin{aligned} D(\sigma - \beta_0) + D(\sigma - 1 + \beta_0) &\geq \tilde{F}(\sigma - \beta_0, 0) + (g_1(\theta) \eta - m \eta^3) \\ &\quad - \kappa \left(\left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\sigma_0 - \eta_0 + \delta} \right) g_1(\theta) \eta + \left(\frac{1}{\delta^3} + \frac{1}{(\sigma_0 - \eta_0 + \delta)^3} \right) m \eta^3 \right) \end{aligned}$$

Nous étudions maintenant le reste de la somme et nous allons montrer, grâce aux propositions 4.2 et 4.4, qu'en fait il est d'ordre $\mathcal{O}(\eta^2)$.

4.1.2. *Cas ($k = 0, 2, 3, 4$) ou ($k = 1$ et $\rho \notin \{\rho_0, 1 - \bar{\rho}_0\}$)*. Les zéros de ζ étant symétriques par rapport à l'axe réel et à l'axe $\Re s = 1/2$, nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{\varrho \in Z(\zeta)} D(\sigma + ik\gamma_0 - \varrho) &= \frac{1}{2} \sum_{\varrho \in Z(\zeta)} \left[D(\sigma + ik\gamma_0 - \varrho) + D(\sigma - 1 + ik\gamma_0 + \bar{\varrho}) \right] \\ &= \sum_{\substack{\varrho \in Z(\zeta) \\ \beta > 1/2}} \left[D(\sigma - \beta + i(k\gamma_0 - \gamma)) + D(\sigma - 1 + \beta + i(k\gamma_0 - \gamma)) \right] \\ &\quad + \sum_{\substack{\varrho \in Z(\zeta) \\ \beta = 1/2}} D(\sigma - \frac{1}{2} + i(k\gamma_0 - \gamma)) \end{aligned}$$

L'argument de positivité de la proposition suivante nous permet d'éliminer une grande partie des zéros. Nous généralisons à la transformée de Laplace F le résultat de Stechkin (voir [17] ou [18]) :

Lemme 4.1 (Stechkin - 1970).

Pour $\beta \in [\frac{1}{2}, 1]$, $y > 0$, $\sigma > 1$ et $\tau = \frac{1+\sqrt{1+4\sigma^2}}{2}$, nous avons

$$\Re \left(\frac{1}{\sigma - \beta + iy} + \frac{1}{\sigma - 1 + \beta + iy} \right) - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{\tau - 1 + \beta + iy} + \frac{1}{\tau - \beta + iy} \right) \geq 0.$$

Proposition 4.2.

Pour $\beta \in [\frac{1}{2}, \sigma]$ et $y > 0$, nous avons

$$D(\sigma - \beta + iy) + D(\sigma - 1 + \beta + iy) \geq 0$$

dès que $\delta \geq 0.61963$ et $0 \leq \kappa \leq \min(\kappa_2(\delta), \kappa_3(\delta))$, où κ_2 et κ_3 sont définis respectivement en (36) et (37).

Preuve.

Nous cherchons le plus grand κ tel que

$$D(\sigma - \beta + iy) + D(\sigma - 1 + \beta + iy) \geq 0,$$

ce qui revient à minorer le terme de gauche lorsque $\beta + i\gamma$ parcourt \mathbb{C} . En fait, celui-ci étant une fonction harmonique sur \mathbb{C} , nous pouvons nous restreindre au domaine $\{1 - \sigma \leq \beta \leq \sigma, |y| \leq y_0\}$, où y_0 est un réel positif et étudier :

$$Q(\beta + iy) = \frac{\tilde{F}(\sigma - \beta, y) + \tilde{F}(\sigma - 1 + \beta, y)}{\tilde{F}(\sigma + \delta - \beta, y) + \tilde{F}(\sigma + \delta - 1 + \beta, y)}$$

Nous allons tout d'abord vérifier que le numérateur de Q ne s'annule jamais sur \mathbb{C} : la positivité de \tilde{F} implique que $\tilde{F}(\sigma + \delta - \beta, y) + \tilde{F}(\sigma - 1 + \delta + \beta, y)$ s'annule si et seulement si $\tilde{F}(\sigma + \delta - \beta, y)$ et $\tilde{F}(\sigma - 1 + \delta + \beta, y)$ s'annulent. En utilisant les majorations du lemme 3.2, nous obtenons les deux inégalités :

$$\begin{aligned} \frac{g_1(\theta)(\sigma - \beta + \delta)}{(\sigma - \beta + \delta)^2 + y^2} - \frac{m\eta_0^2}{(\sigma - \beta + \delta)((\sigma - \beta + \delta)^2 + y^2)} &\leq 0 \\ \frac{g_1(\theta)(\sigma - 1 + \beta + \delta)}{(\sigma - 1 + \beta + \delta)^2 + y^2} - \frac{m\eta_0^2}{(\sigma - 1 + \beta + \delta)((\sigma - 1 + \beta + \delta)^2 + y^2)} &\leq 0 \end{aligned}$$

ce qui équivaut à ce que $|\sigma - \beta + \delta|$ et $|\sigma - 1 + \beta + \delta|$ soient tous deux majorés par $\sqrt{\frac{m}{g_1(\theta)}}\eta_0$ et donc que δ soit majoré par le terme négatif $\sqrt{\frac{m}{g_1(\theta)}}\eta_0 + 1/2 - \sigma$, ce qui est absurde.

Comme l'application $y_0 \mapsto \min_{1-\sigma \leq \beta \leq \sigma, |y| \leq y_0} Q(\beta + iy)$ est décroissante sur $[0, +\infty[$, nous pouvons supposer y_0 assez grand, au moins supérieur à $\sigma - \beta$ et $\sigma - 1 + \beta$ (nous prendrons $y_0 \geq 10$). Par ailleurs, en prenant pour domaine $|y| \leq y_0$ et $1 - \sigma \leq \beta \leq \sigma$, comme $Q(1 - z) = Q(z)$ et $Q(\bar{z}) = Q(z)$, il nous suffit de nous restreindre aux deux ctés : ($y = y_0$, $1/2 \leq \beta \leq \sigma$) et ($0 \leq y \leq y_0$, $\beta = \sigma$). Dans le premier cas, nous minorons $Q(\beta + iy_0)$ par le terme $Q_1(\sigma, \beta, y_0)$:

(35)

$$\frac{\eta g_1(\theta) \left(\frac{\sigma - \beta}{(\sigma - \beta)^2 + y_0^2} + \frac{\sigma - 1 + \beta}{(\sigma - 1 + \beta)^2 + y_0^2} \right) - |H(\sigma - \beta, y_0)| - |H(\sigma - 1 + \beta, y_0)|}{\eta g_1(\theta) \left(\frac{\sigma - \beta + \delta}{(\sigma - \beta + \delta)^2 + y_0^2} + \frac{\sigma - 1 + \beta + \delta}{(\sigma - 1 + \beta + \delta)^2 + y_0^2} \right) + |H(\sigma - \beta + \delta, y_0)| + |H(\sigma - 1 + \beta + \delta, y_0)|}$$

et nous minorons chaque valeur de H grâce au lemme 3.3 :

$$\begin{aligned}
 |H(\sigma - \beta, y_0)| &\leq \frac{3my_0^2\eta^3}{2((\sigma - \beta)^2 + y_0^2)^3} + \frac{M_1(0)\eta^3}{((\sigma - \beta)^2 + y_0^2)^{3/2}} \\
 &\leq \left(\frac{3m}{2y_0} + M_1(0)\right) \frac{\eta_0^2}{y_0^3} \eta \\
 |H(\sigma - 1 + \beta, y_0)| &\leq \frac{3my_0^2\eta^3(\sigma - 1 + \beta)}{((\sigma - 1 + \beta)^2 + y_0^2)^3} + \frac{m_1\eta^4/(\sigma - 1 + \beta)}{((\sigma - 1 + \beta)^2 + y_0^2)^{3/2}} \\
 &\leq \left(3m + \frac{m_1\eta_0}{\sigma_0 - 1/2}\right) \frac{\eta_0^2}{y_0^3} \eta \\
 |H(\sigma - \beta + \delta, y_0)| &\leq \frac{3my_0^2\eta^3(\sigma - \beta + \delta)}{((\sigma - \beta + \delta)^2 + y_0^2)^3} + \frac{m_1\eta^4/(\sigma - \beta + \delta)}{((\sigma - \beta + \delta)^2 + y_0^2)^{3/2}} \\
 &\leq \left(3m + \frac{m_1\eta_0}{\delta}\right) \frac{\eta_0^2}{y_0^3} \eta \\
 |H(\sigma - 1 + \beta + \delta, y_0)| &\leq \frac{3my_0^2\eta^3(\sigma - 1 + \beta + \delta)}{((\sigma - 1 + \beta + \delta)^2 + y_0^2)^3} + \frac{m_1\eta^4/(\sigma - 1 + \beta + \delta)}{((\sigma - 1 + \beta + \delta)^2 + y_0^2)^{3/2}} \\
 &\leq \left(3m + \frac{m_1\eta_0}{\delta}\right) \frac{\eta_0^2}{y_0^3} \eta
 \end{aligned}$$

nous avons ainsi :

$$Q_1(\sigma, \beta, y_0) \geq \frac{g_1(\theta)(2\sigma - 1) \frac{y_0^2}{y_0^2 + 1} - \left[\left(\frac{3m}{2y_0} + 3m + M_1(0)\right)\eta_0^2 + \frac{m_1}{1/2 - \eta_0}\eta_0^3\right] \frac{1}{y_0}}{g_1(\theta)(2\sigma + 2\delta - 1) + \left[6m\eta_0^2 + \frac{2m_1}{\delta}\eta_0^3\right] \frac{1}{y_0}}$$

Nous voyons facilement que le terme de droite est une fonction croissante en la variable σ , donc on peut la minorer par sa valeur en σ_0 , valeur que nous noterons $\kappa_1(y_0, \delta)$. Regardons maintenant Q sur l'autre côté $0 \leq y \leq y_0$, $\beta = \sigma$. Nous allons utiliser le lemme 3.2 pour $\tilde{F}(2\sigma - 1, y)$, $\tilde{F}(\delta, y)$ et $\tilde{F}(2\sigma - 1 + \delta, y)$. Pour $\tilde{F}(0, y)$, le lemme ne suffit plus lorsque y est proche de 0. A la place, nous utilisons la positivité de \tilde{F} et nous minorons ainsi $Q(\sigma + iy)$ par :

$$\frac{1}{(2\sigma - 1)^2 + y^2} \frac{g_1(\theta)(2\sigma - 1) - m\eta_0^2/(2\sigma - 1)}{\frac{\delta g_1(\theta) + m\eta_0^2/\delta}{\delta^2 + y^2} + \frac{(2\sigma - 1 + \delta)g_1(\theta) + m\eta_0^2/(2\sigma - 1 + \delta)}{(2\sigma - 1 + \delta)^2 + y^2}}$$

puis par

$$Q_2(y) = \frac{1}{1 + y^2} \frac{g_1(\theta)(2\sigma_0 - 1) - m\eta_0^2/(2\sigma_0 - 1)}{\frac{\delta g_1(\theta) + m\eta_0^2/\delta}{\delta^2 + y^2} + \frac{(\delta + 1)g_1(\theta) + m\eta_0^2/(\delta + 2\sigma_0 - 1)}{(\delta + 2\sigma_0 - 1)^2 + y^2}}$$

Nous étudions le sens de variation de Q_2 et pour cela regardons le signe du dénominateur de sa dérivée. A un facteur positif près, nous trouvons le trinôme du second degré suivant : $Q_3(y) = d_2y^2 + d_1(\theta)y + d_0$, où les d_i sont des fonctions polynômes de δ . d_2 est positif pour $\delta \leq 0.07$, négatif sinon et le discriminant de Q_3 est toujours positif pour $\delta \geq 0.03$. Supposons $\delta > 0.07$. Alors $Q_3(y) \geq 0$ est successivement positive puis négative sur $[0, +\infty[$ et donc Q_2 est d'abord croissante puis décroissante et son minimum est à

déterminer entre $Q_2(0)$ et $Q_2(y_0)$. En fait nous pouvons mme regarder sans trop de perte la limite de Q_2 en l'infini au lieu de $Q_2(y_0)$. Nous noterons respectivement ces valeurs $\kappa_2(\delta)$ et $\kappa_3(\delta)$:

$$(36) \quad \kappa_2(\delta) = \frac{g_1(\theta)(2\sigma_0 - 1) - m\eta_0^2/(2\sigma_0 - 1)}{(1 + 2\delta)g_1(\theta) + \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta+2\sigma_0-1}\right) m\eta_0^2} = \frac{1}{1 + 2\delta} + \mathcal{O}(\eta_0)$$

$$(37) \quad \kappa_3(\delta) = \frac{g_1(\theta)(2\sigma_0 - 1) - m\eta_0^2/(2\sigma_0 - 1)}{\left(\frac{1}{\delta} + \frac{1+\delta}{(\delta+2\sigma_0-1)^2}\right) g_1(\theta) + \left(\frac{1}{\delta^3} + \frac{1}{(\delta+2\sigma_0-1)^3}\right) m\eta_0^2} = \frac{1}{\delta} + \frac{1}{1+\delta} + \mathcal{O}(\eta_0)$$

En remarquant que $\kappa_1(\cdot, \delta)$ est une fonction décroissante et que $\kappa_2(\delta) \leq \kappa_1(10, \delta)$, nous voyons qu'il ne reste plus pour conclure qu'à choisir la valeur optimale de $\min(\kappa_2(\delta), \kappa_3(\delta))$ lorsque $\delta \in [0, 1]$. A un $\mathcal{O}(\eta_0)$ près, nous prenons donc δ tel que :

$$\frac{1}{1 + 2\delta} = \frac{1}{\frac{1}{\delta} + \frac{1}{1+\delta}} \quad \text{et donc} \quad \kappa = \frac{1}{1 + 2\delta}$$

C'est à dire qu'à un $\mathcal{O}(\eta_0)$ près, $\delta = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.61803\dots$ et $\kappa = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0.44721\dots$. Les calculs exacts donnent :

$$\delta = 0.61963\dots \quad \text{et} \quad \kappa = 0.44213\dots$$

□

Il reste à étudier le cas où $\beta \in [\sigma, 1]$, ou plutôt celui où $|\gamma| \geq k\gamma_0 + t_0$, puisque $\sigma \geq 1 - \frac{1}{R \log(k\gamma_0 + t_0)}$ et $\beta \leq 1 - \frac{1}{R \log|\gamma|}$. Nous fixons la valeur $t_0 = 10$. Nous utiliserons le lemme préliminaire suivant pour montrer la proposition 4.4 ci-après.

Lemme 4.3. *Pour $t_0 = 10$,*

$$\Sigma(t) = \sum_{\substack{\rho \in Z(\zeta) \\ |\gamma| \geq t+t_0}} \frac{1}{(\gamma - t)^2} \leq \begin{cases} c_{30}(0) \leq 0.07063 & \text{si } t = 0, \\ c_{30}(t) \text{ défini en (47)} & \text{si } t \geq T_0. \end{cases}$$

Preuve.

Nous rappelons que $N(u)$ désigne le nombre de zéros non triviaux de ζ de partie imaginaire dans $[0, u]$. D'après un théorème de Rosser (cf. [14]), $N(u)$ vérifie :

$$\left| N(u) - \frac{u}{2\pi} \log \left(\frac{u}{2\pi e} \right) - \frac{7}{8} \right| \leq 0.137 \log u + 0.443 \log \log u + 1.588, \quad (u \geq 2).$$

Nous en déduisons cette inégalité plus pratique pour les applications numériques que nous voulons mener par la suite :

$$(38) \quad N_2(u) \leq N(u) \leq N_1(u), \quad u \geq 2$$

$$(39) \quad \text{avec } N_1(u) = \frac{u}{2\pi} \log \left(\frac{u}{2\pi e} \right) + c_1 \log u + c_2$$

$$(40) \quad \text{et } N_2(u) = \frac{u}{2\pi} \log \left(\frac{u}{2\pi e} \right) - c_1 \log u - c_3,$$

$$(41) \quad \text{avec } c_1 = 0.29998, \quad c_2 = 2.463, \quad c_3 = 0.713.$$

- Dans le cas où $t = 0$, en notant t_1 la plus petite partie imaginaire des zéros de zeta ($t_1 = 14.134725\dots$), nous avons l'égalité :

$$(42) \quad \Sigma(0) = \sum_{|\gamma| \geq t_1} \frac{1}{|\gamma|^2}.$$

et les majorations successives suivantes :

$$(43) \quad \Sigma(0) \leq 2 \int_{t_1}^{+\infty} \frac{dN(u)}{u^2} = 4 \int_{t_1}^{+\infty} \frac{N(u)}{u^3} du \leq 0.07063.$$

- Dans le cas où $t \geq T_0$, nous avons :

$$(44) \quad \begin{aligned} \Sigma(t) &= \sum_{\substack{\rho \in Z(\zeta) \\ \gamma \geq t+t_0}} \left[\frac{1}{(\gamma-t)^2} + \frac{1}{(\gamma+t)^2} \right] \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{\rho \in Z(\zeta) \\ t+t_0+n \leq \gamma < t+t_0+n+1}} \left[\frac{1}{(\gamma-t)^2} + \frac{1}{(\gamma+t)^2} \right] \\ &\leq \sum_{n \geq 0} (N(t+t_0+n+1) - N(t+t_0+n)) \left[\frac{1}{(t_0+n)^2} + \frac{1}{(2t+t_0+n)^2} \right] \end{aligned}$$

Les encadrements (38) nous donnent l'inégalité :

$$(45) \quad \begin{aligned} N(t+t_0+n+1) - N(t+t_0+n) &\leq N_1(t+t_0+n+1) - N_2(t+t_0+n) \\ &\leq \frac{t+t_0+n+1}{2\pi} \log \left(\frac{t+t_0+n+1}{2\pi e} \right) + c_1 \log(t+t_0+n+1) + c_2 \\ &\quad - \frac{t+t_0+n}{2\pi} \log \left(\frac{t+t_0+n}{2\pi e} \right) + c_1 \log(t+t_0+n) + c_3 \\ &\leq \frac{t+t_0+n}{2\pi} \log \left(\frac{t+t_0+n+1}{t+t_0+n} \right) + \left(\frac{1}{2\pi} + 2c_1 \right) \log(t+t_0+n+1) \\ &\quad - \frac{\log(2\pi e)}{2\pi} + c_2 + c_3 \end{aligned}$$

Puis, en utilisant $\log\left(\frac{t+t_0+n+1}{t+t_0+n}\right) \leq \frac{1}{t+t_0+n}$ et $\log(t+t_0+n+1) \leq \log t + \log(t_0+n+1)$, on obtient la majoration explicite :

$$(46) \quad N(t+t_0+n+1) - N(t+t_0+n) \leq \frac{1}{2\pi} + \left(\frac{1}{2\pi} + 2c_1\right) \log t \\ + \left(\frac{1}{2\pi} + 2c_1\right) \log(t_0+n+1) - \frac{\log(2\pi e)}{2\pi} + c_2 + c_3 \leq \left(\frac{1}{2\pi} + 2c_1\right) \log t + a(n) \\ \text{avec } a(n) = \left(\frac{1}{2\pi} + 2c_1\right) \log(t_0+n+1) - \frac{\log(2\pi)}{2\pi} + c_2 + c_3,$$

ce qui donne pour $\Sigma(t)$:

$$(47) \quad \Sigma(t) \leq \left(\frac{1}{2\pi} + 2c_1\right) \log t \sum_{n \geq 0} \left[\frac{1}{(t_0+n)^2} + \frac{1}{(2t+t_0+n)^2} \right] \\ + \sum_{n \geq 0} a(n) \left[\frac{1}{(t_0+n)^2} + \frac{1}{(2t+t_0+n)^2} \right]$$

On notera $c_{30}(t)$ le terme de droite. Chaque fonction $\frac{c_{30}(kt)}{\log t}$ étant décroissante en t , pour $k = 1, 2, 3, 4$, on peut la borner par sa valeur en T_0 : $\frac{c_{30}(kt)}{\log t} \leq \frac{c_{30}(kT_0)}{\log T_0}$, et donc

$$(48) \quad c_{30}(k\gamma_0)\eta \leq c_{30}(kT_0)\eta_0.$$

□

Dans la suite de cette section, nous posons $y_k = \gamma - k\gamma_0$.

Proposition 4.4.

$$\sum_{\substack{\rho \in Z(\zeta) \\ |\gamma| \geq k\gamma_0 + t_0}} (D(\sigma - \beta + iy_k) + D(\sigma - 1 + \beta + iy_k)) \\ \geq - \left(M(-r/R)\eta + \frac{(1+2\kappa)m}{\sigma_0 - 1/2} \eta^2 \right) c_{30}(kT_0)\eta_0.$$

Preuve.

D'après la majoration de \tilde{F} établie au paragraphe 3.2, nous avons :

$$\begin{aligned}
 (49) \quad & \sum_{\substack{\varrho \in Z(\zeta) \\ |\gamma| \geq k\gamma_0 + t_0}} (D(\sigma - \beta + iy_k) + D(\sigma - 1 + \beta + iy_k)) \\
 & \geq \eta g_1(\theta) \sum_{\substack{\varrho \in Z(\zeta) \\ |\gamma| \geq k\gamma_0 + t_0}} \Re \left(\frac{1}{\sigma - \beta + iy_k} + \frac{1}{\sigma - 1 + \beta + iy_k} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\kappa}{\sigma - \beta + \delta + iy_k} - \frac{\kappa}{\sigma - 1 + \beta + \delta + iy_k} \right) \\
 & \quad - \sum_{\substack{\varrho \in Z(\zeta) \\ |\gamma| \geq k\gamma_0 + t_0}} (|H(\sigma - \beta, y_k)| + |H(\sigma - 1 + \beta, y_k)| \\
 & \quad \quad + \kappa |H(\sigma - \beta + \delta, y_k)| + \kappa |H(\sigma - 1 + \beta + \delta, y_k)|)
 \end{aligned}$$

Le terme général de la première somme est positif puisque $\delta \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, d'après le lemme de Stechkin (cf. lemme 2, [17]). Il reste à minorer la seconde somme de (49). Pour cela, nous utilisons le lemme 3.2:

puisque $0 \geq \frac{\sigma - \beta}{\eta} \geq -\frac{1 - \sigma}{\eta} \geq -r/R$, nous avons $|H(\sigma - \beta, y_k)| \leq \frac{M(-r/R)}{y_k^2} \eta^2$ et, en minorant $\sigma - 1 + \beta$, $\sigma - \beta + \delta$ et $\sigma - 1 + \beta + \delta$ par $\sigma_0 - 1/2$, nous obtenons que $|H(\sigma - 1 + \beta, y_k)|$, $|H(\sigma - \beta + \delta, y_k)|$ et $|H(\sigma - 1 + \beta + \delta, y_k)|$ sont majorés par $\frac{M(\frac{\sigma_0 - 1/2}{\eta})}{y_k^2} \eta^2$ et donc par $\frac{m}{(\sigma_0 - 1/2)y_k^2} \eta^3$.

L'inégalité (49) devient alors :

$$\begin{aligned}
 (50) \quad & \sum_{\substack{\varrho \in Z(\zeta) \\ |\gamma| \geq k\gamma_0 + t_0}} (D(\sigma - \beta + iy_k) + D(\sigma - 1 + \beta + iy_k)) \\
 & \geq - \left(M(-r/R) \eta^2 + \frac{(1 + 2\kappa)m}{\sigma_0 - 1/2} \eta^3 \right) \sum_{\substack{\varrho \in Z(\zeta) \\ |\gamma| \geq k\gamma_0 + t_0}} \frac{1}{y_k^2} \\
 & \geq - \left(M(-r/R) \eta^2 + \frac{(1 + 2\kappa)m}{\sigma_0 - 1/2} \eta^3 \right) c_{30}(k\gamma_0)
 \end{aligned}$$

On achève la preuve en utilisant la borne triviale $c_{30}(k\gamma_0)\eta \leq c_{30}(0)\eta_0$, lorsque $k = 0$, et $c_{30}(k\gamma_0)\eta \leq c_{30}(kT_0)\eta_0$, vu en (48), lorsque $k = 1, 2, 3, 4$.

On remarquera qu'il est possible de diminuer la taille de c_{30} , et par conséquent celle du terme reste $\mathcal{C}(\eta)$ décrit à la section 2.4, en choisissant une valeur plus grande pour t_0 . Comme nous n'avons besoin que de la négativité de $\mathcal{C}(\eta_0)$ et qu'en contrepartie la valeur finale de R augmente avec celle de t_0 , nous nous contentons de prendre $t_0 = 10$. \square

On finit la preuve de la proposition 2.5 en déduisant tout d'abord de la proposition 4.4 que

$$(51) \quad \sum_{k=0}^4 a_k \sum_{\substack{\varrho \in Z(\zeta) \\ |\gamma| \geq k\gamma_0 + t_0}} (D(\sigma - \beta + iy_k) + D(\sigma - 1 + \beta + iy_k)) \geq -\mathcal{C}_{31}(\eta) - \mathcal{C}_{32}(\eta)\kappa$$

$$(52) \quad \text{avec } \mathcal{C}_{31}(\eta) = \left(M(-r/R)\eta + \frac{m}{\sigma_0 - 1/2} \eta^2 \right) \sum_{k=0}^4 a_k c_{30}(kT_0)\eta_0$$

$$(53) \quad \mathcal{C}_{32}(\eta) = \frac{2m}{\sigma_0 - 1/2} \sum_{k=0}^4 a_k c_{30}(kT_0)\eta_0 \eta^2$$

(Nous rappelons que c_{30} est défini au lemme 4.3.)

La proposition 4.2, les inégalités (34) et (51) donnent finalement :

$$\sum_{k=0}^4 a_k \sum_{\varrho \in Z(\zeta)} (D(\sigma - \beta + iy_k) + D(\sigma - 1 + \beta + iy_k)) \geq a_1 \tilde{F}(\sigma - \beta_0, 0) - \mathcal{C}_3(\eta)$$

$$(54) \quad \text{avec } \mathcal{C}_3(\eta) = a_1 \left[\left(\left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\sigma_0 - \eta_0 + \delta} \right) g_1(\theta) \eta + \left(\frac{1}{\delta^3} + \frac{1}{(\sigma_0 - \eta_0 + \delta)^3} \right) m \eta^3 \right) \kappa - \left(g_1(\theta) \eta - m \eta^3 \right) \right] + \mathcal{C}_{31}(\eta) + \mathcal{C}_{32}(\eta)\kappa$$

Ainsi, $\mathcal{C}_3(\eta)$ s'écrit sous forme polynomiale :

$$p_1 \eta + p_2 \eta^2 + p_3 \eta^3,$$

$$\text{où } p_1 = a_1 g_1(\theta) \left(\left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\sigma_0 - \eta_0 + \delta} \right) \kappa - 1 \right) + M(-r/R) \sum_{k=0}^4 a_k c_{30}(kT_0)\eta_0,$$

$$p_2 = \frac{(1 + 2\kappa)m}{\sigma_0 - 1/2} \sum_{k=0}^4 a_k c_{30}(kT_0)\eta_0, p_3 = a_1 m \left(\left(\frac{1}{\delta^3} + \frac{1}{(\sigma_0 - \eta_0 + \delta)^3} \right) \kappa + 1 \right).$$

Les conditions imposées à κ et δ en (6) impliquent que p_1 est négative et p_2 et p_3 positives.

Et avec les valeurs numériques choisies au début de la section, on a plus exactement :

$$p_1 = -413.18630\dots, p_2 = 3\,275.49955\dots, p_3 = 73\,082.74832\dots$$

4.2. **Étude de Δ_1 - Preuve de la proposition 2.2 :** Rappelons que le terme étudié est $\Delta_1(s) = T_1(s) - \kappa T_1(s + \delta)$, où

$$T_1(s) = -\frac{1}{2} \log \pi + \frac{1}{2} \Re \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{s}{2} + 1 \right)$$

Lemme 4.5.

$$\Delta_1(\sigma + ik\gamma_0) \leq \begin{cases} c_1(0) & \text{si } k = 0, \\ \frac{1-\kappa}{2} \log \gamma_0 + c_1(k) & \text{si } k = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

$$\text{avec } c_1(0) = -\frac{1-\kappa}{2} \log \pi + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{3}{2} \right) - \frac{\kappa}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{\sigma_0 + \delta}{2} + 1 \right),$$

$$c_1(k) = -\frac{1-\kappa}{2} \log \frac{2\pi}{k} + \frac{1}{2} \min(r_2(\sigma_0 + 2, 3, kT_0), r_3(\sigma_0 + 2, 3, kT_0)) \quad \text{si } k \geq 1.$$

Nous rappelons que r_2 et r_3 ont été définis en (27) et (30).

Preuve.

- Si $k = 0$, nous avons immédiatement grce à la croissance de $\Re \frac{\Gamma'}{\Gamma}$ sur $[0; +\infty[$:

$$\Delta_1(\sigma) \leq -\frac{1-\kappa}{2} \log \pi + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{3}{2} \right) - \frac{\kappa}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{\sigma_0 + \delta}{2} + 1 \right) = c_1(0)$$

- Si $k \geq 1$, utilisons le lemme 3.5 en prenant $x_0 = \sigma_0 + 2$, $x_1 = 3$ et $y_0 = kT_0$:

$$\begin{aligned} \Delta_1(\sigma + ik\gamma_0) &\leq \frac{1-\kappa}{2} \log \gamma_0 + \frac{1-\kappa}{2} \log \frac{k}{2\pi} \\ &+ \frac{1}{2} \min(r_2(\sigma_0 + 2, 3, kT_0), r_3(\sigma_0 + 2, 3, kT_0)) \leq \frac{1-\kappa}{2} \log \gamma_0 + c_1(k) \end{aligned}$$

où les $c_1(k)$ sont des constantes négatives. □

Ainsi, en sommant le lemme 4.5 pour $k = 0, 1, 2, 3, 4$:

$$(55) \quad \sum_{k=0}^4 a_k \Delta_1(\sigma + ik\gamma_0) \leq \frac{A(1-\kappa)}{2} \log \gamma_0 + c_1 \quad \text{avec } c_1 = \sum_{k=0}^4 a_k c_1(k)$$

et donc

$$f(0) \sum_{k=0}^4 a_k \Delta_1(\sigma + ik\gamma_0) \leq \frac{A}{2} (1-\kappa) g_1(\theta) \eta \log \gamma_0 + \mathcal{C}_1(\eta)$$

où \mathcal{C}_1 est la fonction négative donnée par :

$$(56) \quad \mathcal{C}_1(\eta) = c_1 g_1(\theta) \eta \leq -2704.319\eta$$

4.3. **Étude de $D(s-1)$ - Preuve de la proposition 2.3 :** Rappelons que $D(\sigma-1+it) = \tilde{F}(\sigma-1, t) - \kappa \tilde{F}(\sigma-1+\delta, t)$. Nous montrons tout d'abord une proposition intermédiaire :

Proposition 4.6.

$$D(\sigma-1+it) \leq \begin{cases} \tilde{F}(\sigma-1, 0) - \kappa \left(\frac{g_1(\theta)}{\delta} \eta - \frac{m}{(\sigma-1+\delta)^3} \eta^3 \right) & \text{si } t = 0, \\ M(-r/R) \frac{\eta^2}{t^2} - \left(g_1(\theta) \frac{\sigma_0-1+\delta}{2} \eta - \frac{m}{\sigma_0-1+\delta} \eta^3 \right) \frac{\kappa}{t^2} & \text{si } t \geq T_0. \end{cases}$$

Preuve.

Nous utilisons simplement les majorations du lemme 3.2. Dans le cas où $t = 0$, nous avons alors :

$$\begin{aligned} (58) \quad D(\sigma-1) &= \tilde{F}(\sigma-1, 0) - \kappa \tilde{F}(\sigma-1+\delta, 0) \\ &\leq \tilde{F}(\sigma-1, 0) - \kappa \left(\frac{g_1(\theta)}{\sigma-1+\delta} \eta - |H(\sigma-1+\delta, 0)| \right) \\ &\leq \tilde{F}(\sigma-1, 0) - \kappa \left(\frac{g_1(\theta)}{\sigma-1+\delta} \eta - \frac{m}{(\sigma-1+\delta)^3} \eta^3 \right) \end{aligned}$$

et on conclut en observant que $\sigma_0 \leq \sigma \leq 1$.

Dans le cas où $t \geq T_0$, nous avons les inegalites successives (nous rappelons que $-r/R \leq \sigma-1 \leq 0$, $\sigma_0-1+\delta \leq \sigma-1+\delta \leq T_0 \leq t$) :

$$\begin{aligned} (59) \quad &\tilde{F}(\sigma-1, t) - \kappa \tilde{F}(\sigma-1+\delta, t) \\ &\leq \frac{\eta g_1(\theta)(\sigma-1)}{(\sigma-1)^2+t^2} + |H(\sigma-1, t)| - \kappa \left(\frac{\eta g_1(\theta)(\sigma-1+\delta)}{(\sigma-1+\delta)^2+t^2} - |H(\sigma-1+\delta, t)| \right) \\ &\leq \frac{M((\sigma-1)/\eta) \eta^2}{(\sigma-1)^2+t^2} - \kappa \left(\frac{\eta g_1(\theta)(\sigma-1+\delta)}{2t^2} - \frac{m\eta^3}{(\sigma-1+\delta)((\sigma-1+\delta)^2+t^2)} \right) \\ &\leq \frac{M(-r/R) \eta^2}{t^2} - \kappa \left(\frac{\eta g_1(\theta)(\sigma_0-1+\delta)}{2t^2} - \frac{m\eta^3}{(\sigma_0-1+\delta)t^2} \right), \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve de la proposition. \square

Finalement, en prenant $t = k\gamma_0$ dans (58) et (59) avec successivement $k = 0, 1, 2, 3, 4$, la proposition 4.6 permet d'achever la preuve de la proposition 2.3 :

$$\sum_{k=0}^4 a_k D(\sigma-1+ik\gamma_0) \leq a_0 \tilde{F}(\sigma-1, 0) + \mathcal{C}_2(\eta)$$

où $\mathcal{C}_2(\eta)$ s'écrit sous la forme polynômiale

$$(60) \quad \mathcal{C}_2(\eta) = q_1 \eta + q_2 \eta^2 + q_3 \eta^3,$$

$$\text{avec } q_1 = -\kappa \left(a_0 \frac{g_1(\theta)}{\delta} + \frac{\sigma_0-1+\delta}{2} g_1(\theta) \sum_{k=1}^4 \frac{a_k}{(kT_0)^2} \right) \leq 0,$$

$$q_2 = M(-r/R) \sum_{k=1}^4 \frac{a_k}{(kT_0)^2} \geq 0 \text{ et } q_3 = \frac{a_0 m \kappa}{(\sigma_0-1+\delta)^3} + \frac{m \kappa}{\sigma_0-1+\delta} \sum_{k=1}^4 \frac{a_k}{(kT_0)^2} \geq 0$$

et ici $q_1 = -1\,151.623$, $q_2 = 1.360 \cdot 10^{-15}$, $q_3 = 27\,424.672$.

4.4. **Étude du reste Δ_2 - Preuve de la proposition 2.4.** Rappelons que $\Delta_2(s) = T_2(s) - \kappa T_2(s + \delta)$, avec

$$T_2(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Re \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{1}{4} + i \frac{T}{2} \right) H(\sigma - 1/2, t - T) dT + H(\sigma, t)$$

Lemme 4.7.

$$\Delta_2(\sigma + ki\gamma_0) \leq \mathcal{C}_4(\eta, k)$$

$$\text{avec } \mathcal{C}_4(\eta, k) = \mathcal{C}_{41}(\eta, k) + \mathcal{C}_{42}(\eta, k)$$

où $\mathcal{C}_{41}(\eta, k)$ et $\mathcal{C}_{42}(\eta, k)$ sont définis en (61) et (63).

Preuve.

- (1) Étudions d'abord le terme intégral. Pour simplifier, on note x pour $\sigma - 1/2$ ou $\sigma - 1/2 + \delta$ et y pour $k\gamma_0$. Nous rappelons que le lemme 3.2 donne :

$$|H(x, y - T)| \leq \frac{M(x/\eta) \eta^2}{x^2 + (y - T)^2} \leq \frac{m\eta^3}{x(x^2 + (y - T)^2)}$$

et que :

$$\left| \Re \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{1}{4} + i \frac{T}{2} \right) \right| \leq U_0(T),$$

où U_0 est défini au lemme 3.6. Ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \Re \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{1}{4} + i \frac{T}{2} \right) \right| |H(x, y - T)| dT \\ \leq \frac{m\eta^3}{2\pi x} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U_0(T)}{x^2 + (y - T)^2} dT = \mathcal{C}_{40}(\eta, x, y) \end{aligned}$$

Lorsque $y = k\gamma_0$, l'intégrale ci-dessus est de l'ordre de $\log(k\gamma_0 + 1)$ et le η^3 qui la précède est de l'ordre de $1/\log^3 \gamma_0$ ce qui fait qu'il est facile de montrer que cette quantité est décroissante en γ_0 et qu'elle est donc majorée par $\mathcal{C}_{40}(\eta, x, kT_0)$. Nous notons $\mathcal{C}_{41}(\eta, k)$ la majoration trouvée ainsi pour l'intégrale:

$$(61) \quad \mathcal{C}_{41}(\eta, k) = \mathcal{C}_{40}(\eta, \sigma_0 - 1/2, kT_0) + \kappa \mathcal{C}_{40}(\eta, \sigma_0 - 1/2 + \delta, kT_0).$$

- (2) Il nous reste à approcher $H(\sigma, k\gamma_0)$ grce au lemme 3.2 :

$$(62) \quad |H(\sigma, k\gamma_0)| + \kappa |H(\sigma + \delta, k\gamma_0)| \leq \mathcal{C}_{42}(\eta, k)$$

$$(63) \quad \text{avec } \mathcal{C}_{42}(\eta, k) = \begin{cases} \left(\frac{1}{\sigma_0^3} + \frac{\kappa}{(\sigma_0 + \delta)^3} \right) m\eta^3 & \text{si } k = 0, \\ \left(\frac{1}{\sigma_0} + \frac{\kappa}{\sigma_0 + \delta} \right) \frac{m\eta^3}{(kT_0)^2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

□

Finalement :

$$(64) \quad \sum_{k=0}^4 a_k \Delta_2(\sigma + ik\gamma_0) \leq \mathcal{C}_4(\eta) = \sum_{k=0}^4 a_k (\mathcal{C}_{41}(\eta, k) + \mathcal{C}_{42}(\eta, k))$$

avec

$$\mathcal{C}_4(\eta) \leq 2\,391\,006.764\eta^3.$$

4.5. Conclusion. Nous détaillons ci-dessous les étapes consécutives des calculs. Nous donnons les valeurs successives prises pour r et R , ainsi que celles des paramètres η_0 , κ et δ impliqués et enfin celles trouvées pour R_0 . Nous donnons aussi le terme reste

$$\mathcal{C}(\eta) = \mathcal{C}_1(\eta) + \mathcal{C}_2(\eta) + \mathcal{C}_3(\eta) + \mathcal{C}_4(\eta) = \alpha_1 \eta + \alpha_2 \eta^2 + \alpha_3 \eta^3,$$

où α_1 est négative sous la condition (6), et α_2 et α_3 sont toujours positives. Ainsi, comme on l'a expliqué au paragraphe 2.4, $\mathcal{C}(\eta)$ est négatif sur $[0, \eta_0]$ lorsque $\mathcal{C}(\eta_0)$ est négatif, et il n'influe donc pas sur la valeur finale de R_0 .

Etape	R	r	$\eta_0 \cdot 10^3$	κ	δ
1	9.645908801	5.94292	7.67418...	0.44213...	0.61963...
2	5.942924086	5.72033	7.97280...	0.43927...	0.62051...
3	5.720337336	5.69922	8.00233...	0.43898...	0.62060...
4	5.699223507	5.69714	8.00525...	0.43895...	0.62061...
5	5.697149422	5.69694	8.00553...	0.43895...	0.62061...
6	5.696944343	5.69692	8.00556...	0.43895...	0.62061...

Etape	α_1	α_2	α_3	$\mathcal{C}(\eta_0)$	R_0
1	-3 442.756	3 275.500	2 491 514.184	-25.10138...	5.942924086...
2	-3 364.052	3 411.712	2 515 484.337	-25.32921...	5.720337335...
3	-3 354.978	3 425.245	2 517 937.234	-25.33799...	5.699223506...
4	-3 354.069	3 426.585	2 518 180.091	-25.33873...	5.697149421...
5	-3 353.979	3 426.714	2 518 204.048	-25.33878...	5.696944342...
6	-3 353.970	3 426.727	2 518 206.418	-25.33879...	5.696924085...

REFERENCES

- [1] Y. CHENG, *An explicit zero-free region for the Riemann zeta-function*, *Rocky Mountain J. Math.*, 30, 2000, pp 135–148.
- [2] H. DAVENPORT, *Multiplicative Number Theory*, *Graduate Texts in Mathematics*, third edition, 2000 .
- [3] K. FORD, *Vinogradov's integral and bounds for the Riemann Zeta function*, *Proc. London. Math. Soc. (3)* 85, 2002, pp 565-633.
- [4] K. FORD, *Zero-free regions for the Riemann zeta function*, *Number Theory for the Millennium (Urbana, IL, 2000)*, vol. II (2002), pp 25-56.
- [5] J. HADAMARD, *Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques*, *Bull. Soc. Math. France*, 24, 1896, pp 199–220.
- [6] D. R. HEATH-BROWN, *Zero-free regions for Dirichlet L-functions, and the least prime in an arithmetic progression*, *Proc. London Math. Soc.* , 64, 1992, pp 265–338.
- [7] H. KADIRI, *Zero-free regions for the Dirichlet L-functions*, prépublication.

- [8] H. KADIRI, *Régions explicites sans zéros pour les fonctions L de Dirichlet*, Thèse, décembre 2002, disponible sur http://tel.ccsd.cnrs.fr/documents/archives0/00/00/26/95/index_fr.html.
- [9] N. M. KOROBOV, *Estimates of trigonometric sums and their applications*, *Uspehi Mat. Nauk*, 13, 1958, pp 185–192. (Russian)
- [10] K.S. MCCURLEY, *Explicit zero-free regions for Dirichlet L -functions*, *J. Number Theory*, 19, 1984, pp 7–32.
- [11] J. VAN DE LUNE, H. J. J. TE RIELE & D. T. WINTER, *On the zeros of the Riemann zeta function in the critical strip: IV*, *Math. Comp.*, 46, 1986, pp 667–681.
- [12] O. V. POPOV, *A derivation of a modern bound for the zeros of the Riemann zeta function by the Hadamard method*, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.*, 96, 1994, pp 42–45. (Russian)
- [13] B. RIEMANN, *ber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*. *Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin aus dem Jahre 1859*, 1860, pp 671–680.
- [14] J.B. ROSSER, *Explicit bounds for some functions of prime numbers*. *American Journal of Math.*, 63, 1941, pp 211–232.
- [15] J.B. ROSSER & L. SCHOENFELD, *Approximate formulas for some functions of prime numbers*. *Illinois J. Math.*, 6, 1962, pp 64–94.
- [16] J.B. ROSSER & L. SCHOENFELD, *Sharper bounds for the chebyshev functions $\vartheta(x)$ and $\psi(x)$* . *Math. Comp.*, 29(129), 1975, pp 243–269.
- [17] S.B. STECHKIN, *The zeros of the Riemann zeta-function*, *Mat. Zametki*, 8, 1970, pp 419–429 (Russian); English translation in *Math. Notes*, 8, 1970, pp 706–711.
- [18] S.B. STECHKIN, *Rational inequalities and zeros of the Riemann zeta-function*, *Trudy Math. Inst. Steklov*, 189, 1989, pp 110–116 ; English translation in *Proc. Steklov Inst. Math*, *AMS Translations Series*, 4, 1990, pp 127–134.
- [19] C.-J. DE LA VALLÉE POUSSIN, *La fonction zeta de Riemann et les nombres premiers en général*, *Ann. Soc. Sci. Bruxelles Sér. I*, 20, 1896, pp 183–256.
- [20] C.-J. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée*, *Mém. Couronnés et Autres Mém. Publ. Acad. Roy. Sci. des lettres Beaux-Arts Belg.*, 59, 1899–1900, pp 1–74.
- [21] S. WEDENIWSKI, *The first 10 billion zeros of the Riemann zeta function are calculated and satisfy the Riemann hypothesis*. www.hipilib.de/zeta/index.html
- [22] A. WEIL, *Sur les “formules explicites” de la théorie des nombres premiers*. *Oeuvres Complètes*, 2, 1952, pp 48–61.

Habiba Kadiri

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUE

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

CP 6128 succ Centre-Ville

Montréal QC H3C 3J7

Québec, Canada

e-mail: kadiri@dms.umontreal.ca